السنة الرابعة والعشرون/ العدد 90 / شهر ايلول/ سنة 2026 تاريخ قبول النشر/2026/7/23

https://doi.org/10.31272/ijes.v24i90.1582

المجلة العراقية للعلوم الاقتصادية
Iraqi Journal For
Economic Sciences

PISSN : 1812-8742 EISSE : 2791-092X Arcif : 0.375

The causal relationship between the growth rate of stock returns and the growth rate of GDP: A quantitative case study of Iraq

العلاقة السببية بين معدل نمو عوائد الأسهم ومعدل نمو الناتج المحلي الإجمالي: دراسة كمية لحالة العراق

أ. د. صبحي حسون عباس
Subhi Hassoon Abbas
shassoon@uomustansiriyah.edu.iq
كلية الإدارة والاقتصاد/ جامعة المستنصرية

Abstract

The causal relationship between stock returns and GDP is one of the most debated topics in the relevant scientific community. This is due to the divergent opinions of thinkers regarding the possibility and feasibility of linking these two variables, or the ability of the first variable, stock returns, to predict the future trajectory of the second variable, GDP. This is because stock returns are subject to continuous, and sometimes sharp, fluctuations, and may even reach low levels that do not justify investment in stocks offering such returns. Based on the alleged predictive ability of stock markets to predict future GDP, the central problem of this research is that the fluctuations in stock prices, from time to time, may provide an unreliable indicator of the future direction of real economic activity. This research aims to achieve several objectives, including clarifying the nature of the short-term and long-term relationship between stock returns and GDP growth in Iraq, as a case study. The research concluded that stock returns, as an independent variable, cause GDP growth, as a dependent variable, in Iraq, at least during the research period. This is supported by the F-statistic, tested according to the Granger causality test, which showed that its calculated value was higher than its critical value. Therefore, we reject the null hypothesis, which states that stock returns do not cause GDP growth, and accept the alternative hypothesis, which states the opposite.

Keywords: causal relationship, Stock Return Growth Rate, GDP Growth Rate, Restricted and unrestricted model.

المستخلص

يُعد موضوع العلاقة السببية بين عوائد الأسهم والناتج المحلي الإجمالي من اشد المواضيع جدلاً بين الأوساط العلمية ذات الصلة، لما لهذا الامر من تباين في اراء المفكرين حول إمكانية وجدوى الربط بين هذين المتغيرين، او قدرة المتغير الاول، أي عوائد الأسهم، على التنبؤ بالمسار المستقبلي للمتغير الثاني، أي الناتج، طالما ان هذه العوائد قد تتعرض التي التقلبات المستمرة، بل والحادة أحيانا، بل انها قد تصل الى مُستويات مُتدنية لا تُسوّغ الاقدام على الاستثمار في تلك الأسهم، التي تحمل مثل هذه العوائد. استنادا الى القدرة التنبؤية المزعومة لأسواق لأسهم بكنه الناتج مُستقبلا، تتمحور مشكلة هذا البحث في ان تقلب أسعار الأسهم، بين الفينة والفينة الأخرى، قد يُعطي مؤشراً غير موثوق به بما سيؤول عليه النشاط الاقتصادي الحقيقي مُستقبلا. يسعى البحث الى محاولة

تحقيق عدة اهداف، منها توضيح كنه العلاقة قصيرة وطويلة الاجل بين عوائد الأسهم ونمو الناتج المحلي الإجمالي في العراق، كحالة دراسية. توصل البحث من النتائج المُتحصِلة بان عوائد الأسهم، كمتغير مُستقل، تُسبب نمو الناتج المحلي الإجمالي، كمتغير تابع، في حالة العراق، على الأقل خلال مدة البحث، طالما ان اختبار احصاءة F، وفقا لاختبار سببية كرانجر، اظهر بان قيمته المُحتسبة اعلى من نظيرتها الجدولية (الحرِجة)، مما يحدو بنا الى رفض فرضية العدم، التي تنص على عدم تسبيب عوائد الأسهم نمو ذلك الناتج، ونقبل الفرضية البديلة، التي تنص العكس.

الكلمـــات الرئيســـية: العلاقة السببية، معدل نمو عائدات الأسهم، معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي، النموذج المقيد وغير المقيد.

المقدمة

يُعد موضوع العلاقة السببية بين عوائد الأسهم والناتج المحلي الإجمالي من اشد المواضيع جدلاً بين الأوساط العلمية ذات الصلة، لما لهذا الامر من تباين في اراء المفكرين حول إمكانية وجدوى الربط بين هذين المتغيرين، او قدرة المتغير الاول، أي عوائد الأسهم، على التنبؤ بالمسار المستقبلي للمتغير الثاني، أي الناتج، طالما ان هذه العوائد قد تتعرض التي التقلبات المستمرة، بل والحادة أحيانا، بل انها قد تصل الى مُستويات مُتدنية لا تُسوّغ الاقدام على الاستثمار في تلك الأسهم، التي تحمل مثل هذه العوائد. بينما يشير البعض الاخر من المفكرين الى ان زيادة ما في معدل نمو عوائد الاسهم يمكن ان تُظهر تنبؤا، يحمل شيئا من الدقة، بزيادة معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي مستقبلا، ولكن ليس العكس، لان زيادة أسعار الأسهم، ومن ثم عوائدها، تومئ بوجود ثقة عالية باستثمارات وارباح مستقبلية للشركات التي تُصدّر مثل هذه الأسهم. ويستندون في ذلك على ان زيادة أسعار الأسهم يمكن ان ترفع ثروة العوائل المقتنية لهذه الأسهم، مما يحدو بها الى زيادة انفاقها الاستهلاكي، والذي يُعد عنصراً أساسيا من عناصر الناتج المحلي الإجمالي، والذي يزداد بالتبعية. كما يزعُم هؤلاء المفكرون بان المصارف المركزية يُمكن ان تُعزز إمكانية، او قدرة، سوق الأسهم على التنبؤ بالناتج المحلي الإجمالي، عن طريق قيام هذه المصارف بتعديل معدلات الفائدة قصيرة الاجل، مما يحيق التأثير بتكاليف الاقتراض، ومن ثم بأرباح الشركات، وتوجهات المستثمرين. فمثلا، عند انخفاض معدلات الفائدة، تضحى الأسهم أكثر جاذبية للاستثمار، بالمقارنة مع السندات.

1. منهجية البحث

اولاً: مشكلة البحث: استنادا الى القدرة التنبؤية المزعومة لأسواق الأسهم بكنه الناتج مُستقبلا تتمحور مشكلة هذا البحث في ان تقلب أسعار الأسهم، بين الفينة والفينة الأخرى، قد يُعطي أحد المؤشرات، وليس الحصري، على ما سيؤول عليه النشاط الاقتصادي الحقيقي مُستقبلا. كما ان العلاقة، ان وجدت، فهي ليست ثابتة دائماً، حيث اشارت بعض الدراسات الى وجود ارتباط سالب بين عوائد الأسهم والناتج. بمعنى، ان ارتفاع عوائد الأسهم رافقه تدهور في النمو الاقتصادي لاحقا. كما اشارت احدى الدراسات، التي قام بها Hsu, Ritter, Wool and Zhao (2022) الى ان قيمة الارتباط الاحصائي بينهما لا تتجاوز 0.53، اذ انها تُشكك، أصلا بوجود مثل هذه العلاقة، وخصوصا في الاجل الطويل. كما اشارت الى ان عوائد الأسهم تجاوزت نمو GDP اذ ان مؤشر S&P500 في الولايات المتحدة حقق عوائد سنوية حقيقية ناهزت حوالي 7.5%، بينما نما GDP بحوالي 2.5% فحسب، طيلة السنوات الثلاثون الماضية. وعلى هذا الأساس، يطرح البحث التساؤل الاتي: هل يُمكن ان يُسبب نمو عوائد الأسهم نمواً بذات الاتجاه في الناتج المحلي الإجمالي، وهل يمكن ان تكون هذه السببية باتجاه واحد، أي من عائد الأسهم الى الناتج؟

ثانياً : هدف البحث: يسعى البحث الى محاولة تحقيق الأهداف الاتية:

1- توضيح كنه العلاقة قصيرة وطويلة الاجل بين عوائد الأسهم ونمو الناتج المحلي الإجمالي في العراق، كحالة دراسية.

2- معرفة اتجاه العلاقة السببية، وفقا لسببية كرانجر، بين عوائد الأسهم والناتج، وهل هي

باتجاه واحد او باتجاهين مختلفين، وهل ان اتجاهات سوق الأسهم يمكن ان يتنبأ بالنشاط الحقيقي، ويؤثر فيه.

3- إعطاء تصورات وارشادات لصنّاع السياسة ذات الصلة حول كيفية الركون الى حالة سوق الأسهم عند محاولة التنبؤ بالمسار المستقبلي الذي سيكون عليه الناتج، بُغية توجيهه الوجهة المرغوبة، ومعرفة طبيعة السياسة النقدية المتبعة من قبلهم مستقبلا.

ثالثاً: فرضية البحث: ينطلق البحث من فرضية أساسية مفادها: ان عوائد الأسهم، وتقلباتها، يمكن ان تُسبب نمو الناتج المحلي الإجمالي في العراق، كحالة دراسية. بمعنى، ان اتجاه هذه السببية هو باتجاه واحد يسير من تقلب العوائد الى الناتج، وليس باتجاهين. بكلمات أخرى، يُمكن ان توجد سلسلة سببية مباشرة تتمثل في انه عند حصول ارتفاع في أسعار الأسهم، يتبعه زيادة في ربحية هذه الأسهم، مما يُفضي الى ارتفاع ربحية الشركات المصدرة لهذه الأسهم، وباعتبار ان استثمار هذه الشركات بتلك الأسهم، بل وحتى استهلاكها، هو جزء من الناتج المحلي الإجمالي، فان الأخير يزداد بالتبعية.

رابعاً: اهمية البحث: تتمحور أهمية البحث في التنقيب عن كنه العلاقة السببية بين متغيرين اقتصاديين هامين، لمعرفة وجود مثل هذه السببية واتجاهها، مما يُرشد صناع السياسة والقرار على التنبؤ بما سيؤول اليه المتغير المتأثر بالعلاقة السببية. ان هذا العامل او المتغير المُسبِب لتغير متغير اخر، يمارس تأثيره عليه، بالطبع، مع متغيرات اخرى. الا ان هذا التأثير قد يساعد في التعرف، ولو جُزئيا، بما سيحدث لمتغيرات أخرى متأثرة، مما يحدو بصناع السياسة اتخاذ إجراءات مُسبقة لدرء المخاطر الوشيكة.

خامساً: مجتمع وعينة البحث: يتمثل مُجتمع البحث بالعراق كحالة دراسية، وتم انتقاء الناتج المحلي الإجمالي كمتغير أساسي متأثرا بعوائد الأسهم المتداولة في السوق المالية.

سادساً: منهج البحث: يتبنى البحث المنهج التحليلي مشفوعا بالنهج الكمي القياسي، محاولةً منه اثبات العلاقة السببية بين عوائد الأسهم والناتج واتجاهها في العراق خلال مدة البحث.

سابعاً : الاطار الزماني والمكاني:

يتخذ البحث العراق كحالة دراسية اطارا مكانيا له، بينما تم انتقاء المدة 2003-2023 كاطار زماني للقيام بالجانب العملي للبحث.

ثامناً: هيكلية البحث: تدور أجزاء البحث بطرح إطار نظري لمتغيرات البحث، وهما عوائد الأسهم والناتج المحلي الإجمالي، في جزئيه الأول والثاني، بينما ينصب محوره الثالث في جانبه العملي، والذي يتمثل في اختبار سببية العلاقة بينهما، وفقا لسببية كرانجر، كأداة لاختبار هذه العلاقة بين متغيري البحث.

الصعوبات والتحديات التي اكتنفت البحث: تم انجاز هذا البحث، في جانبه العملي، يدويا، دون الاستعانة بأية برامج إحصائية جاهزة. وعلى الرغم من انها كانت مهمة عسيرة وشاقة ومُطولة، الا ان انه تم توخي الدقة في النتائج عند التعامل مع هذا الكم الهائل من الأرقام والعمليات الحسابية. لقد قام البحث بإجراء عملية تحقيقية بعد كل جزء من هذا العمل المضني للتأكد من دقة النتائج المتوصل اليها. ونظرا لان هذه العمليات تستغرق كم هائل من الصفحات، فقد ارتأى البحث الاقتصار على إعطاء النتائج، ووضع العمليات التفصيلية في ملاحق، إذا كان نظام المجلة، الذي سينشر بها هذا البحث، يسمح بذلك.

المحور الأول: الإطار المفاهيمي والنظري للناتج المحلي الإجمالي وعوائد الأسهم

مفهوم الناتج المحلي الإجمالي وانواعه: ان الناتج المحلي الإجمالي هو القيمة النقدية أو السوقية الإجمالية لجميع السلع والخدمات النهائية المنتجة داخل حدود دولة ما في مدة زمنية محددة. انه بمثابة مِرآة تعكس السلامة الاقتصادية لاقتصاد دولة ما. انه يُعد كأداة رئيسة لتوجيه صناع السياسات والمستثمرين والشركات في اتخاذ القرارات الاستراتيجية، كما يتضح

ادناه. (ADAM HAYES, 2023, p. 2,) يميل الناتج المحلي الإجمالي للدولة إلى الزيادة عندما تتجاوز القيمة الإجمالية للسلع والخدمات التي يبيعها المنتجون المحليون للدول الأجنبية القيمة الإجمالية للسلع والخدمات الأجنبية التي يشتريها المستهلكون المحليون. عندما يحدث هذا الموقف، يقال إن الدولة لديها فائض تجاري، ويميل الناتج المحلي الإجمالي للدولة للارتفاع. إذا حدث الموقف المعاكس - أي إذا كان المبلغ الذي ينفقه المستهلكون المحليون على المنتجات الأجنبية أكبر من المبلغ الإجمالي لما يستطيع المنتجون المحليون بيعه للمستهلكين الأجانب - يُطلق عليه عجز تجاري. في هذه الحالة، يميل الناتج المحلي الإجمالي للدولة إلى الانخفاض. لنفترض أن إحدى الدول كان لديها ناتج محلي إجمالي اسمي قدره 100 مليار دولار في عام 2014. وبحلول عام 2024، نما ناتجها المحلي الإجمالي الاسمي إلى 150 مليار دولار. كما ارتفعت الأسعار بنسبة 100٪ خلال نفس الفترة. في هذا المثال، إذا نظرت فقط إلى الناتج المحلي الإجمالي الاسمي، يبدو أن اقتصاد الدولة يؤدي أداءً جيدًا. ومع ذلك، فإن الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي (المعبر عنه بأسعار عام 2014) لن يتجاوز 75 مليار دولار، مما يكشف عن حدوث انخفاض عام في الأداء الاقتصادي الحقيقي خلال هذه المدة.

أنواع الناتج المحلي الإجمالي

1-**الناتج المحلي الإجمالي الاسمي:** يتم تقييم جميع السلع والخدمات المحسوبة في الناتج المحلي الإجمالي الاسمي بالأسعار الجارية، او الحالية، التي تباع بها هذه السلع والخدمات بالفعل في سنة ما. لا يستبعد التضخم أو وتيرة ارتفاع الأسعار، مما قد يؤدي إلى تضخم رقم النمو. يتم تقييم الناتج المحلي الإجمالي الاسمي إما بالعملة المحلية أو بالعملات الأجنبية بأسعار الصرف في سوق العملات لمقارنة الناتج المحلي الإجمالي للدول بشكل مالي بحت. يتم استخدام الناتج المحلي الإجمالي الاسمي عند مقارنة أرباع، او فصول، مختلفة من الناتج في نفس العام. عند مقارنة الناتج المحلي الإجمالي لعامين أو أكثر، يتم استعمال الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي. وذلك لأن إزالة تأثير التضخم يسمح في الواقع بمقارنة السنوات المختلفة للتركيز فقط على الحجم.

2-**الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي:** ان الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي هو مقياس معدل حسب التضخم ليعكس عدد السلع والخدمات التي ينتجها الاقتصاد في عام معين، مع ثبات، او استبعاد، الأسعار من عام إلى آخر لفصل تأثير التضخم أو الانكماش عن اتجاه الناتج بمرور الزمن. ونظرًا لأن الناتج المحلي الإجمالي يعتمد على القيمة النقدية للسلع والخدمات، فهو عُرضة للتضخم. تميل الأسعار المرتفعة إلى زيادة الناتج المحلي الإجمالي للدولة، لكن هذا لا يعكس بالضرورة أي تغيير في كمية أو جودة السلع والخدمات المنتجة. وبالتالي، من خلال النظر فقط إلى الناتج المحلي الإجمالي الاسمي للاقتصاد، قد يكون من الصعب معرفة ما إذا كان الرقم قد ارتفع بسبب التوسع الحقيقي في الإنتاج أو ببساطة لأن الأسعار ارتفعت. يستخدم خبراء الاقتصاد عملية تتكيف، او تعديل، مع التضخم السائد للوصول إلى الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي للاقتصاد. من خلال تعديل الناتج في أي عام مُعين لمستويات الأسعار التي سادت في سنة مرجعية، تُدعى سنة الأساس، يمكن لخبراء الاقتصاد تعديل تأثير التضخم. بهذه الطريقة، من الممكن مُقارنة الناتج المحلي الإجمالي لدولة ما من عام إلى آخر ومعرفة ما إذا كان يوجد هُناك أي نمو حقيقي. يتم حساب الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي باستخدام معامل انكماش أسعار الناتج المحلي الإجمالي، وهو الفرق في الأسعار بين العام الحالي وسنة الأساس. على سبيل المثال، إذا ارتفعت الأسعار بنسبة 5% عن سنة الأساس، فإن معامل الانكماش سيكون 1.05. يتم تقسيم الناتج المحلي الإجمالي الاسمي على هذا المعامل، مما يعطي الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي. عادة ما يكون الناتج المحلي الإجمالي الاسمي أعلى من الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي لأن التضخم عادة ما يكون رقمًا موجبًا. وإذا كان هناك اختلاف كبير بين الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي والناتج المحلي الإجمالي الاسمي لدولة ما، فقد يكون هذا مؤشراً على وجود تضخم أو انكماش كبير

في اقتصادها. يمكن التعبير عن الناتج المحلي الإجمالي بالقيمة الاسمية أو الحقيقية. يتم حساب الناتج المحلي الإجمالي الاسمي بناءً على قيمة السلع والخدمات المنتجة عند جمعها، وبالتالي فهو لا يعكس فقط قيمة الناتج ولكن أيضًا التغير في التسعير الكلي لهذا الناتج. بعبارة أخرى، في اقتصاد ذا معدل تضخم سنوي يبلغ 5٪، سيزداد الناتج المحلي الإجمالي الاسمي بنسبة 5٪ سنويًا نتيجة لنمو الأسعار حتى لو ظلت كمية ونوعية السلع والخدمات المنتجة كما هي، كما يتضح ادناه. (Bob and Benjamin Curry,2024,p.1Sullivan)على النقيض من ذلك، يتم تعديل الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي للتضخم. وهذا يعني أنه يأخذ في الاعتبار التغيرات في مستويات الأسعار لقياس التغيرات في الناتج الفعلي. يركز صناع السياسات والأسواق المالية في المقام الأول على الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي لأن الزيادة التي يولدها التضخم ليست نمو حقيقي. يُمكن إظهار حساب النمو الاقتصادي الحقيقي والاسمي باستخدام مثال افتراضي لاقتصاد ينتج، مثلا، سلعة واحدة فقط. لنفترض أنه في السنة الأولى، كان مقدار السلعة المنتجة 100 كغم وكان سعر السلعة 2 دولار للكيلوغرام، لذا فإن القيمة الإجمالية للإنتاج كانت 200 دولار (100 كغم × 2 دولار). في السنة الثانية، تم إنتاج 105 كغم من السلعة وكان السعر 2.05 دولار للكيلوغرام، لذا فإن القيمة الإجمالية للإنتاج كانت 215.25 دولارًا (105 كغم × 2.05 دولار). لإيجاد معدل نمو GDP الحقيقي والاسمي لهذا الاقتصاد، نستخدِم الصيغ الآتية:

معدل نمو GDP الحقيقي= (مقدار الإنتاج في السنة 2 - مقدار الإنتاج في السنة 1)/ مقدار الإنتاج في السنة 1= (100kg-105kg) / 100kg =5%

معدل نمو GDP الاسمي= (قيمة الإنتاج في السنة 2-قيمة الإنتاج في السنة 1) / قيمة الإنتاج في السنة 1= ($25.215 -$200) /$200 =8%

في هذا المثال، يكون نمو الناتج المحلي الإجمالي الاسمي (8%) أكبر من نمو الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي (5%) لأنه يشمل الزيادة في الأسعار خلال الفترة. (مجموع معدلات نمو الناتج المحلي الإجمالي الحقيقي والأسعار قريب من معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي الاسمي، ولكن ليس مساوياً له تماماً، طالما ان معدل نمو الأسعار في مثالنا أعلاه هو (2.0-2.05) 0.025=2.0/، وعند إضافة هذا المعدل الى المعدل الحقيقي للناتج (5%)، يكون الجواب 0.075، وهو قريب من 8%، وليس مساويا له).

3-**الناتج المحلي الإجمالي لكل نسمة او للفرد:** ان الناتج المحلي الإجمالي للفرد هو مقياس للناتج المحلي الإجمالي لكل فرد في عدد سكان دولة ما. ويُشير إلى أن كمية الناتج أو الدخل للفرد في الاقتصاد. يمكن أن يُشير إلى متوسط الإنتاجية أو متوسط مستوى المعيشة. يمكن تحديد الناتج المحلي الإجمالي للفرد من حيث المستوى الاسمي أو الحقيقي (المعدل حسب التضخم) أو تعادل القوة الشرائية. ([1]) وفقًا للتفسير الأساسي، يوضح الناتج المحلي الإجمالي للفرد مقدار قيمة الإنتاج التي يمكن أن تذهب إلى كل مواطن فردي. وهذا يُترجم أيضًا إلى مقياس للثروة الوطنية الإجمالية، نظرًا لأن القيمة السوقية للناتج المحلي الإجمالي للفرد تعمل أيضًا كمقياس للازدهار.

4-**معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي:** يُقارن معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي التغير السنوي (أو ربع السنوي) في الناتج الاقتصادي للدولة لقياس مدى سرعة نمو الاقتصاد. وعادة ما يتم التعبير عن هذا المقياس كنسبة مئوية، وهو شائع لدى صناع السياسات الاقتصادية لأن نمو الناتج المحلي الإجمالي يُعتقد أنه مرتبط ارتباطًا وثيقًا بأهداف سياسية رئيسة، مثل معدلات

([1]) يتم قياس الناتج المحلي الإجمالي بعملة البلد المعني. ويتطلب ذلك إجراء تعديل عند محاولة مقارنة قيمة الناتج في بلدين يستخدمان عملات مختلفة. والطريقة المعتادة هي تحويل قيمة الناتج المحلي الإجمالي لكل بلد إلى عملات اجنبية ثم مقارنتهما. ويمكن إجراء التحويل إلى العملة الاجنبية إما باستخدام أسعار الصرف السوقية - تلك السائدة في سوق الصرف الأجنبي - أو أسعار الصرف القائمة على تعادل القوة الشرائية (PPP). وسعر الصرف القائم على تعادل القوة الشرائية هو المعدل الذي يتعين عنده تحويل عملة بلد ما إلى عملة بلد آخر لشراء نفس الكمية من السلع والخدمات في كل بلد. وهناك فجوة كبيرة بين أسعار الصرف السوقية وأسعار الصرف القائمة على تعادل القوة الشرائية في الأسواق الناشئة والبلدان النامية.

التضخم والبطالة، كما يتضح ادناه. (DHUHA ISHAQ KHALEEL AL-TABLEE, Prof. Dr Subhi Hassoon,2025.p.7)إذا تسارعت معدلات نمو الناتج المحلي الإجمالي، فقد يكون ذلك إشارة إلى أن الاقتصاد يعاني من ارتفاع نشاطه، وقد يسعى المصرف المركزي إلى رفع معدلات الفائدة، لكبح التضخم. وعلى العكس من ذلك، ترى المصارف المركزية أن معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي المتقلص (أو السلبي) (أي الركود) هو إشارة إلى أنه يجب خفض الفائدة وأن التحفيز قد يكون ضروريًا. على الرغم من أن الناتج المحلي الإجمالي هو مقياس يُستخدم على نطاق واسع، إلا أن هناك طرقًا أخرى لقياس النمو الاقتصادي لأي دولة. في حين يقيس الناتج المحلي الإجمالي النشاط الاقتصادي داخل حدود دولة ما (سواء كان المنتجون من مواطني تلك الدولة أو كيانات مملوكة لأجانب)، فإن الناتج القومي الإجمالي هو مقياس للإنتاج الإجمالي للأشخاص أو الشركات المحلية في الدولة، بما في ذلك تلك الموجودة في الخارج. يستبعد الناتج القومي الإجمالي الإنتاج المحلي للأجانب. كما ان الدخل القومي الإجمالي هو مقياس آخر للنمو الاقتصادي. إنه مجموع كل الدخل الذي يكسبه مواطنو أو رعايا دولة ما (بغض النظر عما إذا كان النشاط الاقتصادي الأساسي يتم محليًا أو في الخارج). ان العلاقة بين الناتج القومي الإجمالي والدخل القومي الإجمالي مُماثلة للعلاقة بين نهج الإنتاج (الناتج) ونهج الدخل المستخدم لحساب الناتج المحلي الإجمالي. يستخدم الناتج القومي الإجمالي نهج الإنتاج، بينما يستخدم الدخل القومي الإجمالي نهج الدخل. باستخدام الدخل القومي الإجمالي، يتم احتساب دخل الدولة على أنه دخلها المحلي، بالإضافة إلى ضرائب الأعمال غير المباشرة والاستهلاك (وكذلك صافي دخل العوامل الأجنبية). يتم حساب رقم صافي دخل العوامل الأجنبية عن طريق طرح جميع المدفوعات المقدمة للشركات والأفراد الأجانب من جميع المدفوعات المقدمة للشركات المحلية. يُمكن مقارنة الناتج المحلي الإجمالي بالناتج القومي الإجمالي، أو كما يُعرف الآن بالدخل القومي الإجمالي. والفرق هو أن الناتج المحلي الإجمالي يحدد نطاقه وفقًا للموقع، في حين يحدد الدخل القومي الإجمالي نطاقه وفقًا للملكية. وفي سياق عالمي، فإن الناتج المحلي الإجمالي العالمي والدخل القومي الإجمالي العالمي مصطلحان متكافئان، كما يتضح ادناه. (Economic Growth,2025,p.1)ان الناتج المحلي الإجمالي هو الناتج الذي يتم إنتاجه داخل حدود دولة ما؛ والدخل القومي الإجمالي هو مُنْتَج يتم إنتاجه بواسطة مؤسسات مملوكة لمواطني دولة ما. يكون الاثنان مُتماثلين إذا كانت جميع المؤسسات الإنتاجية في دولة ما مملوكة لمواطنيها، ولم يكن هؤلاء المواطنون يمتلكون مؤسسات إنتاجية في أي دول أخرى. ولكن في الممارسة العملية، تجعل الملكية الأجنبية الناتج المحلي الإجمالي والدخل القومي الإجمالي غير مُتطابقين. فالإنتاج داخل حدود دولة ما، ولكن من قبل مؤسسة مملوكة لشخص خارج الدولة، يُعد جزءًا من الناتج المحلي الإجمالي ولكن ليس الدخل القومي الإجمالي؛ ومن ناحية أخرى، فإن الإنتاج من قبل مؤسسة تقع خارج الدولة، ولكن مملوكة لأحد مواطنيها، يُعد جزءًا من الدخل القومي الإجمالي ولكن ليس الناتج المحلي الإجمالي. على سبيل المثال، ان الدخل القومي الإجمالي لدولة ما هو قيمة الناتج الذي تنتجه الشركات المملوكة لهذه الدولة، بغض النظر عن مكان تواجد هذه الشركات. وعلى نحو مماثل، إذا أثقل كاهِل دولة ما بديون مُتزايدة، وأنفقت مبالغ كبيرة من دخلها لخدمة هذا الدين، فسينعكس هذا في انخفاض دخلها القومي الإجمالي ولكن ليس في انخفاض ناتجها المحلي الإجمالي. وعلى نحو مماثل، إذا باعت دولة مواردها لكيانات خارج بلدها، فسوف ينعكس هذا أيضًا بمرور الوقت في انخفاض دخلها القومي الإجمالي، ولكن ليس في انخفاض ناتجها المحلي الإجمالي. وهذا من شأنه أن يجعل استعمال الناتج المحلي الإجمالي أكثر جاذبية للسياسيين في البلدان التي تعاني من زيادة الديون الوطنية وتناقص الأصول. ان الدخل القومي الإجمالي يساوي الناتج المحلي الإجمالي بالإضافة إلى إيرادات الدخل من بقية العالم مطروحًا منها مدفوعات الدخل لبقية العالم. (Eugene F. Fama,2023,p.3) هناك مثال آخر يُباعد الفرق بين الناتج المحلي الإجمالي

والدخل القومي الإجمالي، وهو مُقارنة مؤشرات الدول المتقدمة والنامية. ففي الدول المتقدمة، يكون مستوى ناتجها المحلي الإجمالي اعلى من مستوى دخلها القومي الإجمالي، بينما في الدول النامية يكون ناتجها المحلي الإجمالي أقل من دخلها القومي الإجمالي. هذا يوضح أن هذه الدول تتلقى استثمارات ومساعدات أجنبية من الخارج، حيث ان إجمالي الدخل مقسوما على عدد السكان يمثل دخل الفرد. نظرًا لأن الناتج المحلي الإجمالي يوفر مؤشرًا مباشرًا لصحة ونمو الاقتصاد، يمكن للشركات استعمال الناتج المحلي الإجمالي كدليل لاستراتيجية أعمالها. تستخدم الهيئات الحكومية، والمصرف المركزي، معدل النمو وإحصاءات الناتج المحلي الإجمالي الأخرى كجزء من عملية اتخاذ القرار في تحديد نوع السياسات النقدية التي يجب تنفيذها. إذا كان معدل النمو يتباطأ، فقد ينفذون سياسة نقدية توسعية لمحاولة تعزيز الاقتصاد. وإذا كان معدل النمو قويًا، فقد يستخدمون السياسة النقدية الانكماشية لإبطاء النمو لمحاولة درء التضخم.

مفهوم عوائد الأسهم وانواعها

مفهـوم العائـد: ان العائد، المعروف أيضًا بالعائد المالي، هو في أبسط صوره الأموال التي تم جنيها أو خسارتها من استثمار ما على مدار مدة زمنية معينة، كما يتضح ادناه. (Wikipedia,2025,p.1)يمكن التعبير عن العائد اسميًا باعتباره التغير في القيمة النقدية للاستثمار بمرور الوقت. ويمكن أيضًا التعبير عن العائد كنسبة مئوية مستمدة من نسبة الربح إلى الاستثمار. ويمكن أيضًا تقديم العائدات كنتائج صافية (بعد الرسوم والضرائب والتضخم) أو عائدات إجمالية لا تأخذ في الاعتبار أي شيء سوى تغير السعر. بإيجاز، العائد هو التغير في سعر أحد الأصول أو الاستثمارات أو المشاريع بمرور الوقت، والذي قد يتم تمثيله من حيث تغير السعر أو التغير النسبي. يمثل العائد الإيجابي ربحًا، في حين يمثل العائد السلبي خسارة. غالبًا ما يتم حساب العائدات سنويًا لأغراض المقارنة، في حين يحسب عائد فترة الاحتفاظ، او الحيازة، الربح أو الخسارة خلال الفترة الكاملة التي تم الاحتفاظ فيها بالاستثمار. يأخذ العائد الحقيقي في الاعتبار تأثيرات التضخم والعوامل الخارجية الأخرى، في حين يهتم العائد الاسمي فقط بتغير السعر. يشمل العائد الإجمالي للأسهم تغير السعر بالإضافة إلى مدفوعات الأرباح والفوائد. يعلم المستثمرون الحصيفون أن التعريف الدقيق للعائد يعتمد على الموقف ويعتمد على البيانات المالية المدخلة لقياسه. يمكن أن يعني مصطلح شامل مثل "الربح" الإجمالي أو التشغيلي أو الصافي أو قبل الضريبة أو بعد الضريبة. يمكن أن يعني مصطلح شامل مثل "الاستثمار" الأصول المختارة أو المتوسطة أو الإجمالية. يُعد عائد فترة الحيازة عائد الاستثمار على مدار الوقت الذي يمتلكه فيه مستثمر معين. يمكن التعبير عن عائد فترة الحيازة اسميًا أو كنسبة مئوية. عند التعبير عنه كنسبة مئوية، فإن المصطلح المستخدم غالبًا هو معدل العائد (RoR) Rate of Return. على سبيل المثال، ان العائد المكتسب خلال المدة الدورية للشهر هو عائد شهري والعائد المكتسب كل سنة هو عائد سنوي. غالبًا ما يهتم الأشخاص بالعائد السنوي للاستثمار، أو العائد على أساس سنوي year over year (YoY)، والذي يحسب تغير السعر من اليوم إلى نفس التاريخ قبل عام واحد. لا يمكن مقارنة العائدات على مُدد دورية بأطوال مختلفة إلا عند تحويلها إلى فترات بنفس الطول. من المعتاد مقارنة العائدات المحققة خلال فترات زمنية تمتد على مدار العام. وتُسمى عملية تحويل فترات العائد الأقصر أو الأطول إلى عائدات سنوية بالتحويل إلى عائدات سنوية.

أنواع العوائد

العائد الاسمي: العائد الاسمي هو صافي الربح أو الخسارة للاستثمار معبرًا عنه بعملة معينة قبل أي تعديلات للضرائب أو الرسوم أو الأرباح أو التضخم أو أي تأثير آخر على المبلغ. ويمكن حسابه من خلال حساب التغير في قيمة الاستثمار على مدى مدة زمنية محددة بالإضافة إلى أي توزيعات مطروحًا منها أي نفقات. تعتمد التوزيعات التي يتلقاها المستثمر على نوع الاستثمار أو

المشروع ولكنها قد تشمل الأرباح أو الفائدة أو الإيجارات أو الحقوق أو المزايا أو التدفقات النقدية الأخرى التي يتلقاها المستثمر. تعتمد النفقات التي يدفعها المستثمر على نوع الاستثمار أو المشروع ولكنها قد تشمل الضرائب أو التكاليف أو الرسوم أو النفقات التي يدفعها المستثمر للقيام الاستثمار والحفاظ عليه وبيعه. على سبيل المثال، افترض أن المستثمر يشتري أسهمًا متداولة علنًا بقيمة 1,000 دولار، ولا يتلقى أي توزيعات، ولا يدفع أي نفقات، ويبيع الأسهم بعد عامين مقابل 1,200 دولار. العائد الاسمي بالدولار هو 1,200 دولار – 1,000 دولار = 200 دولار. ان العائد الإيجابي هو الربح أو المال الذي يتم الحصول عليه من استثمار أو مشروع. وعلى نحو مماثل، يمثل العائد السلبي الخسارة أو المال المفقود من استثمار أو مشروع.

العائد الحقيقي: يتم تعديل معدل العائد الحقيقي وفقًا للتغيرات في الأسعار بسبب التضخم أو عوامل خارجية أخرى. تعبر هذه الطريقة عن معدل العائد الاسمي بالقيمة الحقيقية، مما يحافظ على ثبات القوة الشرائية لمستوى معين من رأس المال بمرور الوقت. يتيح تعديل العائد الاسمي للتعويض عن عوامل مثل التضخم تحديد مقدار العائد الاسمي الذي يمثل عائدًا حقيقيًا. إن معرفة معدل العائد الحقيقي للاستثمار أمر مهم للغاية قبل استثمار الأموال. وذلك لأن التضخم يمكن أن يقلل من القيمة بمرور الزمن، تمامًا كما تعمل الضرائب أيضًا على تقليصها. كما يجب على المستثمرين أيضًا أن يفكروا مَلياً فيما إذا كانت المخاطر التي ينطوي عليها استثمار معين هي شيء يمكنهم تحمله بالنظر إلى معدل العائد الحقيقي. إن التعبير عن معدلات العائد بالقيم الحقيقية بدلاً من القيم الاسمية، وخاصة خلال فترات التضخم المرتفع، يقدم صورة أوضح لقيمة الاستثمار. يشمل العائد الإجمالي للسهم كلًا من مكاسب وخسائر رأس المال ودخل الأرباح، في حين أن العائد الاسمي للسهم يصور فقط تغير سعره.

نسب او معدلات العائد: ان نسب العائد هي مجموعة فرعية من النسب المالية التي تقيس مدى فعالية إدارة الاستثمار. وهي تساعد في تقييم ما إذا كان يتم توليد أعلى عائد ممكن على الاستثمار. بشكل عام، تقارن نسب العائد بين الأدوات المتاحة لتوليد الربح، مثل الاستثمار في الأصول أو الأسهم إلى صافي الدخل. تجري نسب العائد هذه المقارنة عن طريق تقسيم الأصول أو الأسهم المحددة أو الإجمالية إلى صافي الدخل. والنتيجة هي نسبة العائد لكل دولار مُستثمَر يمكن استخدامها لتقييم قوة الاستثمار من خلال مقارنته بمعايير مثل نسب العائد للاستثمارات أو الشركات أو الصناعات أو الأسواق المماثلة. على سبيل المثال، يُشير عائد رأس المال الى استرداد الاستثمار الأصلي.

العائد مُقابل الايراد(Yield vs. Return): يُستخدم الإيراد والعائد أحيانًا بالتبادل في مضمار التمويل. ومع ذلك، اعتمادًا على السياق، يمكن أن يأخذا أيضًا معاني مختلفة. في بعض هذه الحالات، يُنظر إلى العائد yield باعتباره جزءًا من الايراد Return، كما يتضح ادناه. (,2024,p.3JASON FERNANDO) ان الايراد، في سياق الدخل الثابت، على سبيل المثال، هو الدخل الناتج عن الاستثمار، والذي يُعبر عنه عادةً كنسبة مئوية من سعر الاستثمار أو القيمة الاسمية. على سبيل المثال، السند بقيمة اسمية 1,000 دولار وقسيمة سنوية (مدفوعات فائدة) بقيمة 50 دولارًا سيكون له ايراد بنسبة 5%. من ناحية أخرى، يشمل العائد كلًا من الدخل الناتج عن الاستثمار وأي مكاسب أو خسائر رأسمالية ناتجة عن تغييرات في السعر السوقي للاستثمار. تُشير العائدات السلبية إلى الخسارة، في حين أن العائدات الإيجابية تشير إلى الربح. يحتاج المستثمرون إلى عائد متوقع أعلى للاستثمارات الأكثر خطورة للتعويض عن هذا الخطر الإضافي المتمثل في الخسارة. وهذا هو السبب في أن الأوراق المالية منخفضة المخاطر، مثل السندات الحكومية، تحمل عوائد متوقعة أقل نسبيًا من الأوراق المالية ذات المخاطر الأعلى مثل الاسهم. ان العائد الإجمالي هو التغير المطلق في السعر فضلاً عن أي دخل تدفعه الاستثمارات على مدى فترة زمنية معينة. يأخذ العائد الصافي العائد الإجمالي ويطرح منه أي

عمولات ورسوم إدارية ورسوم أخرى وضرائب. بعبارة أخرى، العائد الصافي هو ما يُمكن الحصول عليه فعليًا من الاستثمار. كما يأخذ العائد الحقيقي في الاعتبار تأثيرات التضخم. (John Y. Campbell,1987, pp. 375-79) يمكن أن يساعد الاستثمار في مجموعة متنوعة من الأوراق المالية المختلفة في تنويع المحفظة وتحقيق عائد أعلى محتمل دون إضافة الكثير من المخاطر الإضافية. ومن خلال توزيع الاستثمارات على قطاعات وفئات أصول مختلفة لا ترتبط ارتباطاً وثيقاً ببعضها البعض، يستطيع المستثمرون الحد من مخاطر التأثير السلبي الذي قد يخلفه أي سهم واحد على العائدات. والواقع أن الحسابات الرياضية تظهر أن التنويع السليم من الممكن أن يعمل على الحد من تقلبات المحفظة الاستثمارية مع الحفاظ على العائد المتوقع أو زيادته. (Kimberly Amadeo ,2024p.2) بإيجاز، ان العائد هو الربح أو الخسارة التي يولدها الاستثمار على مدى فترة زمنية. يشير العائد الإيجابي إلى الربح، في حين يشير العائد السلبي إلى الخسارة. عادة ما يتم تحديد العائد على الاستثمار كنسبة مئوية ويتضمن أي دخل يولده الاستثمار (على سبيل المثال، الفائدة والأرباح) فضلاً عن مكاسب رأس المال (زيادات الأسعار). لتوليد عوائد متوقعة أعلى، يحتاج المستثمرون عادة إلى تحمل المزيد من مخاطر الخسائر المحتملة. ولأن قيمة الأسهم تعتمد على سمتين أساسيتين للعمليات، الحجم (رأس المال المستثمر في الأسهم) والربحية (العائد على حقوق الملكية)، فإن التقييم يعادل التنبؤ بحجم وربحية العمليات المستقبلية. ويترتب على ذلك أن عوائد الأسهم، باعتبارها تغيرات في القيمة، ترتبط بالتغيرات في التوقعات بشأن حجم الشركة وربحيتها في الفترات المستقبلية. (LESLIE KRAMER ,2024,p.2) يعتمد متوسط عائد سوق الأسهم على الفترة التي تقيسها والمؤشر المستخدم لتمثيل السوق. العائد السنوي هو مجرد متوسط ما تم كسبه على مدى مدة زمنية. يتطلب تقييم أداء السهم أكثر من مجرد النظر إلى التغير في السعر بمرور الوقت. إذا كان السهم يدفع أرباحًا، على سبيل المثال، فيجب إضافة هذه التدفقات النقدية إلى العائد الإجمالي للاستثمار. لا يمكن مقارنة العائدات بشكل صحيح إلا بمعيار مناسب يعكس أسلوب الاستثمار ومستوى المخاطرة للسهم الذي تبحث عنه. وللتغلب على هذا، ينظر معظم المستثمرين إلى العائدات الإجمالية للسهم والتي تشمل جميع مدفوعات الأرباح أو الفائدة بالإضافة إلى عائد السعر. (Mike Price,2023,p.1) تسمح عملية تقييم الأسهم للمستثمر إلى حد ما بتحديد ما إذا كان السهم مقومًا بأقل من قيمته الحقيقية أو مقومًا بأعلى من قيمته الحقيقية أو يتم تداوله بسعر السوق العادل. يساعد هذا التقييم في منع المستثمر من خسارة استثماره وتحقيق ربح مثالي. هناك العديد من العوامل التي تؤثر على أداء الاستثمار. تشمل بعض العوامل ثقة المستثمرين والمستهلكين، والسياسات الحكومية، وتغيرات أسعار الفائدة، والتكنولوجيا، والمناخ، والتضخم، والتغيرات في العرض والطلب، كما يتضح ادناه. (Peter Chen and Guochang Zhang,2007, pp. 222-223) إن النظر إلى التغير في سعر السهم بحد ذاته هو طريقة ساذجة لتقييم أداء السهم. فكل شيء نسبي، وبالتالي يجب مقارنة العائد لإجراء تقييم سليم. بالإضافة إلى النظر إلى العائدات الإجمالية للشركة ومقارنتها بالسوق ووزنها نسبة إلى المنافسين داخل صناعة الشركة، هناك العديد من العوامل الأخرى التي يجب مراعاتها في تقييم أداء السهم. يجب النظر فيما إذا كانت الشركة تدفع أرباحًا وكيف يمكن لإعادة استثمار هذه الأرباح أن يحسن عوائدها الإجمالية. كما يجب اخذ التضخم في الاعتبار عند حساب العائدات، خاصة عند آفاق طويلة الأجل للاستثمارات. يُطلق على هذا عائدًا حقيقيًا ويمكن القيام به ببساطة عن طريق طرح التضخم من العائد السنوي للاستثمار.

العلاقة بين الناتج المحلي الإجمالي والاستثمار بالأسهم: يُراقب المستثمرون الناتج المحلي الإجمالي لأنه يوفر إطارًا لاتخاذ القرار. تعد بيانات أرباح الشركات والمخزون في تقرير الناتج المحلي الإجمالي مرجعًا رائعًا لمستثمري الأسهم، حيث تُظهر كلتا الفئتين النمو الإجمالي خلال مدة ما؛ تعرض بيانات أرباح الشركات أيضًا الأرباح قبل الضريبة، والتدفقات النقدية

التشغيلية، والتفاصيل لجميع القطاعات الرئيسة في الاقتصاد، كما يتضح ادناه. (RENEE ANN BUTLER 1089-11081990 .pp) يمكن أن تلعب مقارنة معدلات نمو الناتج المحلي الإجمالي في بلدان مختلفة دورًا في تخصيص الأصول، مما يساعد في اتخاذ القرارات بشأن ما إذا كان ينبغي الاستثمار في الاقتصادات سريعة النمو في الخارج وإذا كان الأمر كذلك، فأي منها. إن أحد المقاييس المثيرة للاهتمام التي يمكن للمستثمرين استخدامها للحصول على فكرة عن تقييم سوق الأسهم هو نسبة القيمة السوقية الإجمالية إلى الناتج المحلي الإجمالي، معبرًا عنها كنسبة مئوية. وأقرب ما يعادل هذا من حيث تقييم الأسهم هو القيمة السوقية للشركة إلى إجمالي المبيعات (أو الإيرادات)، والتي من حيث السهم هي نسبة السعر إلى المبيعات المعروفة. (TIM 2024,p.1CALLEN) يستطيع المستثمرون استخدام الناتج المحلي الإجمالي لاتخاذ قرارات الاستثمار - فالاقتصاد السيئ يعني غالبًا انخفاض الأرباح وأسعار الأسهم. ان الصحة الاقتصادية، كما يتم قياسها من خلال التغيرات في الناتج المحلي الإجمالي، مهمة جدًا لأسعار الأصول المالية. نظرًا لأن النمو الاقتصادي الأقوى يميل إلى أن يترجم إلى أرباح أعلى للشركات وميل المستثمرين للمخاطرة، فإنه يرتبط بشكل إيجابي بأسعار الأسهم. وعلى العكس من ذلك، فإن نمو الناتج المحلي الإجمالي الأقوى يمكن أن يضر باستثمارات الدخل الثابت، مثل السندات، من خلال جعل عوائدها أقل جاذبية على أساس نسبي.

المحور الثاني: الجانب التطبيقي او العلمي للبحث

في هذا المحور، نعرض البيانات الخاصة بمتغيرات البحث وتحليل مساراتها، وتطبيق اختبار السببية عليها، بُغية اختبار تحقق او دحض فرضية البحث. يُلاحظ من الجدول ادناه، ان الاتجاه العام للناتج كان باتجاه متصاعد، عموما، ماعدا بعض بالتراجعات في بعض السنوات، الا ان عوائد الأسهم شهدت بعض التقلبات، لا سيما في فترات تراجع الناتج. تم إيجاد اعداد عُشرية لمعدلات نمو الناتج والعوائد، ومن ثم إيجاد معدلات نمو هذه الأرقام العُشرية، بُغية استخدامها في العمل القياسي، الذي قام به الباحث يدويا، من دون استعمال أي برنامج احصائي، توخيا للدقة، على الرغم من ان تلك المهمة شاقة ومُضنية ومُطولة.

جدول 1: الناتج المحلي الإجمالي وعوائد الأسهم ومعدلات نموها في العراق للمدة 2003-2023

year	y	X	Ry (%)	Rx (%)	Ry(de.)	Rx(dec.)	rx (%)	rx (de.)
2003	29,585,788,600,000	1,001,432,000,000	-	-	-	0.2100	-	-
2004	53,235,358,700,000	1,580,503,000,000	79.94	57.82	0.7994	0.5782	175.33	1.7533
2005	73,533,598,600,000	3,160,104,000,000	38.13	99.94	0.3813	0.9994	72.85	0.7285
2006	95,587,954,800,000	1,948,548,000,000	29.99	-38.34	0.2999	-0.3834	-138.36	-1.3836
2007	111,455,813,400,000	2,128,668,000,000	16.60	9.24	0.1660	0.924	-341.00	-3.4100
2008	157,026,061,600,000	2,282,983,000,000	40.89	7.25	0.4089	0.725	-21.54	-0.2154
2009	130,643,200,400,000	3,125,921,000,000	-16.80	36.92	-0.1680	0.3692	-49.08	-0.4908
2010	162,064,565,500,000	3,446,713,000,000	24.05	10.26	0.2405	0.1026	-72.21	-0.7221
2011	217,327,107,400,000	4,930,232,000,000	34.10	43.04	0.3410	0.4304	319.49	3.1949
2012	254,225,490,700,000	5,597,363,000,000	16.98	13.53	0.1698	0.1353	-68.56	-0.6856
2013	273,587,529,200,000	11,451,367,000,000	7.62	104.59	0.7620	0.10459	-22.70	-0.2270
2014	266,332,655,100,000	9,520,626,000,000	-2.65	-16.86	-0.2650	-0.1686	-261.20	-2.6120
2015	194,680,971,800,000	8,503,943,000,000	-26.90	-10.68	-0.2690	-0.1068	-36.65	-0.3665
2016	196,924,141,700,000	9,354,696,000,000	1.15	10.00	0.0115	0.1000	-193.63	-1.9363
2017	221,665,709,500,000	8,190,983,000,000	12.56	-12.44	0.1256	-0.1244	-224.40	-2.2440
2018	268,918,874,000,000	11,350,356,000,000	21.32	38.57	0.2132	0.3857	-410.05	-4.1005
2019	276,157,867,600,000	11,661,912,000,000	2.69	2.74	0.0269	0.274	-28.96	-0.2896
2020	215,661,516,500,000	14,033,993,000,000	-21.91	20.34	-0.2191	0.2034	-25.77	-0.2577
2021	304,053,321,284,000	15,872,906,000,000	40.99	13.10	0.4099	0.1310	-35.59	-0.3559
2022	415,628,494,400,000	15,587,161,000,000	36.70	-1.80	0.3670	-0.180	-237.40	-2.3740
2023	330,046,390,600,000	20,738,760,000,000	-20.59	33.05	-0.2059	0.3305	-283.61	-2.8361

Source: - https://data.worldbank.org/indicator

- https://dataviz.vam.wfp.org/the-middle-east-and-northern-africa/iraq/economic/exchange-rates

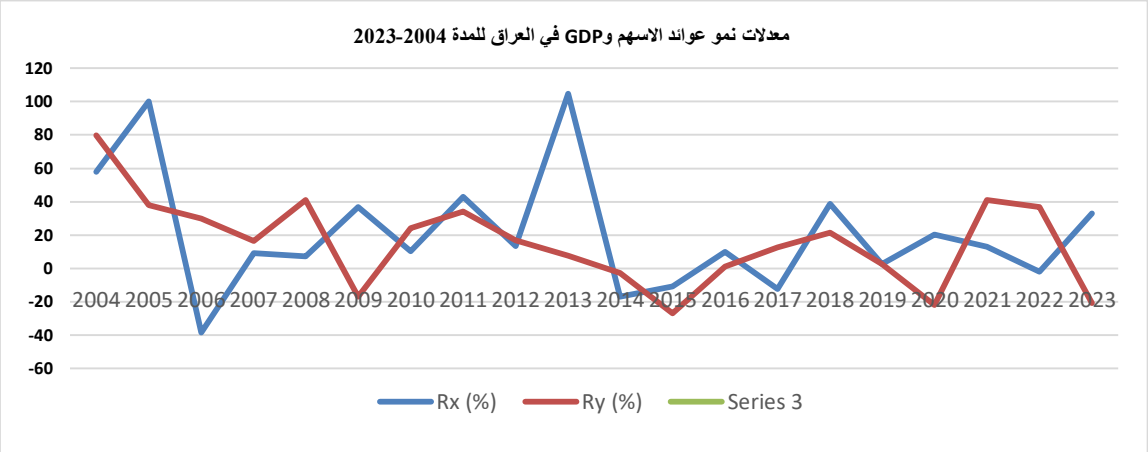
- المصرف المركزي العراقي، مديرية الإحصاء والأبحاث، النشرات السنوية، بغداد، سنوات وصفحات مُتفرقة.

حيث: y=الناتج المحلي الإجمالي بالأسعار الجارية (بدون النفط) x=القيمة السوقية لاسهم الشركات

المدرجة في سوق العراق للأوراق المالية، Ry =معدل نمو GDP، Rx=معدل نمو القيمة السوقية للأسهم، Ry(decimal)=معدل نمو الناتج المحلي الإجمالي (ارقام عشرية) Rx(decimal)=معدل نمو أسعار الاسهم (ارقام عُشرية)rx=معدل نمو عوائد الأسهم،

rx(decimal) =معدل نمو عوائد الأسهم (ارقام عُشرية). الشكل ادناه يوضح معدلات نمو متغيري البحث.

الشكل (1): معدلات نمو عوائد الأسهم وGDP في العراق للمدة 2004-2023



المصدر: من اعداد الباحث استنادا الى بيانات الجدول 1.

يُلاحظ من الشكل المشار اليه مدى التقارب بيم معدلات نمو المتغيرين، ماعدا بعض السنوات القليلة، التي اختلفا عن بعضهما البعض. إيجاد معادلة الانحدار التالية: $Yt=\alpha0+\alpha1yt-1+\alpha2yt-1$ باستخدام طريقة المصفوفة إذا كان لدينا البيانات التالية للمتغيرات المشار اليها:

إيجاد قيم المعاملات β0، β1، β2 يدويًا، خطوة بخطوة، وبالتفصيل، وذلك بإيجاد قيمة المحدد أولًا، ثم إيجاد قيم مُرافق المصفوفة ومعكوسها. لإيجاد معادلة الانحدار (النموذج المُقيد، الذي يضم المتغير التابع ومتباطئاته فقط): $Yt=\beta0+\beta1Yt-1+\beta2Yt-2$ باستخدام جبر المصفوفات سنتناول تقدير المربعات الصغرى العادية (OLS) خطوة بخطوة. هذا يعني أننا نحل: $\alpha=(x^Tx)^{-1}x^Ty$ حيث: y: متجه قيم المتغيرات التابعة (من 2006 إلى 2023، أي 18 مشاهدة)، x: مصفوفة من المتغيرات الانحدارية (عمود من 1 للتقاطع، وأعمدة لـ yt−1 and yt−2).

الخطوة 1: استخرج بيانات y, yt−1, and yt−2

Year	Yt	yt−1	yt−2	$yt-1^2$	$yt-2^2$	yt-1*yt-2
2004	0.7994	-	-	-	-	-
2005	0.3813	0.7994	-	-	-	-
2006	0.2999	0.3813	0.7994	0.1452	0.6384	0.3044
2007	0.1660	0.2999	0.3813	0.09	0.1452	0.1143
2008	0.4089	0.1660	0.2999	0.0276	0.09	0.0498
2009	-0.1680	0.4089	0.1660	0.1673	0.0276	0.0679
2010	0.2405	-0.1680	0.4089	0.0282	0.1673	-0.0687
2011	0.3410	0.2405	-0.1680	0.0581	0.0282	-0.0405
2012	0.1698	0.3410	0.2405	0.1163	0.0581	0.0822
2013	0.7620	0.1698	0.3410	0.0289	0.1163	0.0580
2014	-0.2650	0.7620	0.1698	0.5806	0.0289	0.1295
2015	-0.2690	-0.2650	0.7620	0.0702	0.5806	-0.2019
2016	0.0115	-0.2690	-0.2650	0.0724	0.0702	0.0713
2017	0.1256	0.0115	-0.2690	0.0001	0.0724	-0.0032
2018	0.2132	0.1256	0.0115	0.0159	0.0001	0.0015
2019	0.0269	0.2132	0.1256	0.0454	0.0159	0.0268
2020	-0.2191	0.0269	0.2132	0.0007	0.0454	0.0058
2021	0.4099	-0.2191	0.0269	0.0480	0.0007	-0.0059
2022	0.3670	0.4099	-0.2191	0.1681	0.0480	-0.0898
2023	-0.2059	0.3670	0.4099	0.1347	0.1681	0.1505
Σ		3.004	3.436	1.7976	2.3013	0.6519

إيجاد منقول المصفوفة(xT)أي يجب علينا تحويل صفوف المصفوفة إلى أعمدة المصفوفة(x)وإضافة عمود من الوحدات للحد الثابت. لإنشاء المصفوفة المنقولةXT من البيانات المُقدمة يجب:

1-إنشاء المصفوفة x باستخدام المتغيرين x1 وx2

2-أضف عمودًا من 1 لتمثيل الحد الثابت (المقطع).

3-نقل المصفوفة الناتجة، محولاً الصفوف إلى أعمدة.

الخطوة 1: أنشئ المصفوفة x بحيث يكون عمود من الآحاد للتقاطع ليمثل كل صف من المصفوفة: [1,x1,x2]

Obs.	β0	yt−1 (x1)	yt−2 (x2)	$x1^2$	$x2^2$	x1*x2
1	1	0.3813	0.7994	0.3813^2	0.7994^2	0.7994*0.3813
2	1	0.2999	0.3813	0.2999^2	0.3813^2	0.3813*0.2999
3	1	0.1660	0.2999	0.1660^2	0.2999^2	0.2999*0.1660
4	1	0.4089	0.1660	0.4089^2	0.1660^2	0.1660*0.4089
5	1	-0.1680	0.4089	$(-0.1680)^2$	0.4089^2	0.4089*(−0.1680)
6	1	0.2405	-0.1680	0.2405^2	$(-0.1680)^2$	−0.1680*0.2405
7	1	0.3410	0.2405	0.3410^2	0.2405^2	0.2405*0.3410
8	1	0.1698	0.3410	0.1698^2	0.3410^2	0.3410*0.1698
9	1	0.7620	0.1698	0.7620^2	0.1698^2	0.1698*0.7620
10	1	-0.2650	0.7620	$(-0.2650)^2$	0.7620^2	0.7620*(−0.2650)
11	1	-0.2690	-0.2650	$(-0.2690)^2$	$(-0.2650)^2$	−0.2650*(−0.2690)
12	1	0.0115	-0.2690	0.0115^2	$(-0.2690)^2$	−0.2690*0.0115
13	1	0.1256	0.0115	0.1256^2	0.0115^2	0.0115*0.1256
14	1	0.2132	0.1256	0.2132^2	0.1256^2	0.1256*0.2132
15	1	0.0269	0.2132	0.0269^2	0.2132^2	0.2132*0.0269
16	1	-0.2191	0.0269	$(-0.2191)^2$	0.0269^2	0.0269*(−0.2191)
17	1	0.4099	-0.2191	0.4099^2	$(-0.2191)^2$	−0.2191*0.4099
18	1	0.3670	0.4099	0.3670^2	0.4099^2	0.4099*0.3670
Σ	18	3.004	3.436	1.7972	2.3015	0.6520

الخطوة 2: احسب المجاميع اللازمة لـ xTx

xTx = n ∑x1 ∑x2 = 18 3.0040 3.4360
∑x1 ∑x12 ∑x2x1 3.0040 1.7972 0.6520
∑x2 ∑x1x2 ∑x22 3.4360 0.6520 2.3015 (3x3)

سنقوم بحساب المحدد باستخدام الصيغة العامة لمصفوفة 3×3:

$$\det(A)=a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg)$$

حيث:

A= a b c = 18 3.0040 3.4360
d e f 3.0040 1.7972 0.6520
g h i 3.4360 0.6520 2.3015 (3x3)

First term: a(ei−fh): ei=2.3015*1.7972=4.1363, fh=0.6520*0.6520=0.4251
ei−fh=4.1363−0.4251=3.7112, a(ei−fh)=18*3.7112=66.8016
Second term: −b(di−fg): di=3.0040*2.3015=6.9137, fg=0.6520*3.4360=2.2403
di−fg=6.9137−2.2403=4.6734, −b(di−fg)=−3.0040*4.6734=−14.0389
Third term: c(dh−eg): dh=3.0040*0.6520=1.9586, eg=1.7972*3.4360=6.1752
dh−eg=1.9586−6.1752=−4.2166, c(dh−eg)=3.4360*(−4.2166) =−14.4882
det(xTx)=66.8016−14.0389−14.4882 =38.2745

التحقق: للتأكد من صحة البيانات، لنستخدم طريقة بديلة للتحقق (قاعدة ساروس Sarrus' Rule):

det(A)=aei+bfg+cdh−ceg−bdi−afh
aei=18*1.7972*2.3015=74.4526, bfg=3.0040*0.6520*3.4360=6.7298
cdh=3.4360*3.0040×0.6520=6.7298, ceg=3.4360*1.7972*3.4360=21.2179
bdi=3.0040*3.0040*2.3015=20.7688, afh=18*0.6520*0.6520=7.6519
det(A)=74.4526+6.7298+6.7298−21.2179−20.7688−7.6519= 38.274

لإيجاد مصفوفة العوامل المساعدة، نستخدم الصيغة التالية: $C_{ij}=(-1)^{i+j} * \det(M_{ij})$، حيث Mij هي المصفوفة الثانوية التي تم الحصول عليها بحذف الصف i والعمود j من A

C11: Minor M11 (Delete Row 1, Column 1)
M11= 1.7972 0.6520
0.6520 2.3015
det(M11) =(1.7972) (2.3015) −(0.6520)2=3.7112, C11=(−1)1+1det *(M11)=3.7112
C12: Minor M12 (Delete Row 1, Column 2)
M12= 3.0040 0.6520
3.4360 2.3015
det(M12)=(3.0040)(2.3015)−(0.6520)(3.4360)=4.6734,C12=(−1)1+2*det(M12)=−4.6734
C13: Minor M13 (Delete Row 1, Column 3)
M13= 3.0040 1.7972
3.4360 0.6520
det(M13)=(3.0040)(0.6520)−(1.7972)(3.4360)=−4.2166, C13=(−1)1+3 * det(M13)=−4.2166
C21=C12=-4.6734

C22: Minor M22 (Delete Row 2, Column 2)
M22= 18 3.4360
3.4360 2.3015
det(M22)=(18)(2.3015)−(3.4360)2=29.6209, C22=(−1)2+2 * det(M22)=29.6209
C23: Minor M23 (Delete Row 2, Column 3)
M23= 18 3.0040
3.4360 0.6520
det(M23)=(18)(0.6520)−(3.0040)(3.4360)=1.4143, C23=(−1)2+3 *det(M23)=−1.4143
C31=C13=-4.2166, C32=C23=-1.4143
C33: Minor M33 (Delete Row 3, Column 3)
M33=18 3.0040
3.0040 1.7972
det(M33)=(18)(1.7972)−(3.0040)2=23.3256, C33=(−1)3+3 * det(M33)=23.3256
C= 3.7112 −4.6734 −4.2166
−4.6734 29.6209 −1.4143
−4.2166 −1.4143 23.3256
adj(A)=CT= 3.7112 −4.6734 −4.2166
−4.6734 29.6209 −1.4143
−4.2166 −1.4143 23.3256 so, adj(A)=CT.

التحقق: للتحقق من صحة البيانات، نتحقق مما يلي: A*adj(A)=det(A)*I

A*adj(A)=18 3.0040 3.4360 * 3.7112 −4.6734 −4.2166
3.0040 1.7972 0.6520 −4.6734 29.6209 −1.4143
3.4360 0.6520 2.3015 −4.2166 −1.4143 23.3256
First Row: (18)(3.7112)+(3.0040)(−4.6734)+(3.4360)(−4.2166)=38.27=det (A)
(18)(−4.6734)+(3.0040)(29.6209)+(3.4360)(−1.4143) ≈ 0
(18)(−4.2166)+(3.0040)(−1.4143)+(3.4360)(23.3256) ≈0
Second Row: (3.0040)(3.7112)+(1.7972)(−4.6734)+(0.6520)(−4.2166) ≈0
(3.0040)(−4.6734)+(1.7972)(29.6209)+(0.6520)(−1.4143) 38.27≈det(A)
(3.0040)(−4.2166)+(1.7972)(−1.4143)+(0.6520)(23.3256) ≈0
Third Row: (3.4360)(3.7112)+(0.6520)(−4.6734)+(2.3015)(−4.2166) ≈0
(3.4360)(−4.6734)+(0.6520)(29.6209)+(2.3015)(−1.4143) ≈0
(3.4360)(−4.2166)+(0.6520)(−1.4143)+(2.3015)(23.3256) ≈38.27≈det(A)
A * adj(A)≈38.27 0 0
0 38.27 0
0 0 38.297 = det(A) * I

حساب معكوس A، والذي يُرمز له بـ A−1، باستخدام الصيغة التالية:A−1= (1/det(A))*adj(A)

A−1= (1/38.2745) 3.7112 −4.6734 −4.2166 = 0.0970 −0.1221 −0.1102
−4.6734 29.6209 −1.4143 −0.1221 0.7739 −0.0370
−4.2166 −1.4143 23.3256 −0.1102 −0.0370 0.6094

التحقق: لضمان صحة النتائج، نتحقق باستخدام الصيغة الاتية: A * A−1 = I

A * A−1 =18 3.0040 3.4360 * 0.0970 −0.1221 −0.1102
3.0040 1.7972 0.6520 −0.1221 0.7739 −0.0370
3.4360 0.6520 2.3015 −0.1102 −0.0370 0.6094
(A·A−1)11: 18(0.0970)+3.0040 (−0.1221)+3.4360(−0.1102) =1
(A·A−1)22: 3.0040(−0.1221)+1.7972(0.7739) +0.6520(−0.0370) =1
(A·A−1)33: 3.4360(−0.1102)+0.6520(−0.0370) +2.3015(0.6094) = 1

يجب أن تقترب الحدود غير القطرية من 0، مما يؤكد: A * A−1 = I
(A·A−1)12 (Row 1, Column 2): =18(−0.1221)+3.0040(0.7739)+3.4360(−0.0370)≈0
(A·A−1)13 (Row 1, Column 3): =18(−0.1102)+3.0040(−0.0370)+3.4360(0.6094)≈0
(A·A−1)21 (Row 2, Column 1) =(A·A−1)12=0

(A·A−1)23 (Row 2, Column 3): =3.0040(−0.1102)+1.7972 (−0.0370)+ 0.6520≈0
(A·A−1)31 (Row 3, Column 1) =(A·A−1)13=0
(A·A−1)32 (Row 3, Column 2) =(A·A−1)23=0

إيجاد قيمة $x^T y$:

Obs.	Yt	x1	x2	x1*y	x2*y
1	0.2999	0.3813	0.7994	0.114352	0.23974
2	0.1660	0.2999	0.3813	0.049783	0.063296
3	0.4089	0.1660	0.2999	0.067877	0.122629
4	-0.1680	0.4089	0.1660	-0.0687	-0.02789
5	0.2405	-0.1680	0.4089	-0.0404	0.09834
6	0.3410	0.2405	-0.1680	0.082011	-0.05729
7	0.1698	0.3410	0.2405	0.057902	0.040837
8	0.7620	0.1698	0.3410	0.129388	0.259842
9	-0.2650	0.7620	0.1698	-0.20193	-0.045
10	-0.2690	-0.2650	0.7620	0.071285	-0.20498
11	0.0115	-0.2690	-0.2650	-0.00309	-0.00305
12	0.1256	0.0115	-0.2690	0.001444	-0.03379
13	0.2132	0.1256	0.0115	0.026778	0.002452
14	0.0269	0.2132	0.1256	0.005735	0.003379
15	-0.2191	0.0269	0.2132	-0.00589	-0.04671
16	0.4099	-0.2191	0.0269	-0.08981	0.011026
17	0.3670	0.4099	-0.2191	0.150433	-0.08041
18	-0.2059	0.3670	0.4099	-0.07557	-0.0844
Σ	2.4152	3.0024	3.4348	0.2716	0.2580

إيجاد قيم المعلمات باستخدام الصيغة: β^=(xTx)-1*xTy

$$\hat{\beta} = \begin{matrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \begin{matrix} 0.0970 & -0.1221 & -0.1102 \\ -0.1221 & 0.7739 & -0.0370 \\ -0.1102 & -0.0370 & 0.6094 \ (3x3) \end{matrix} * \begin{matrix} 2.4152 \\ 0.2716 \\ 0.2580 \ (3x1) \end{matrix}$$

β0=(0.0970)(2.4152)+(−0.1221)(0.2716)+(−0.1102)(0.2580) = 0.1727
β1=(−0.1221)(2.4152)+(0.7739)(0.2716)+(−0.0370)(0.2580) =−0.0942
β2=(−0.1102)(2.4152)+(−0.0370)(0.2716)+(0.6094)(0.2580) =−0.1190

$$\hat{\beta} = \begin{matrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \begin{matrix} 0.1727 \\ -0.0942 \\ -0.1190 \ (3x1) \end{matrix}$$

y^=0.1727 - 0.0942 x1 - 0.1190 x2 (النموذج المُقيد)

الخطوة 3: التحقق: للتحقق من صحة الحل، لنرى ما إذا كان: xTx β^ ≈ xTy

$$xTx\ \hat{\beta} = \begin{matrix} 18 & 3.0040 & 3.4360 \\ 3.0040 & 1.7972 & 0.6520 \\ 3.4360 & 0.6520 & 2.3015 \ (3x3) \end{matrix} * \begin{matrix} 0.1727 \\ -0.0942 \\ -0.1190 \ (3x1) \end{matrix}$$

First Row (Should Equal Σy=2.4152): 18(0.1727)+3.0040(−0.0942)+3.4360(−0.1190)≈ 2.4167 (minor rounding error)
Second Row (Should Equal Σx1y=0.2716): 3.0040(0.1727)+1.7972 (−0.0942)+ 0.6520(−0.1190)=0.2719
Third Row (Should Equal Σx2y=0.2580): 3.4360(0.1727)+0.6520(−0.0942)+ 2.3015 (−0.1190) =0.2581

التحقق: للتأكد من صحة النتائج (مثال للتحقق للمشاهدة 1):
y^1=0.1727−0.0942(0.3813)−0.1190(0.7994)=0.0417 (matches table)

حساب المتبقيات ومجموع مربعات البواقي (SSR)

Obs.	Yt	x1	x2	y^=0.1727-.0942x1-.1190x2	εt=yt-y^	ϵt^2
1	0.2999	0.3813	0.7994	0.0417	0.2582	0.0667
2	0.1660	0.2999	0.3813	0.099	0.0670	0.0045
3	0.4089	0.1660	0.2999	0.1214	0.2875	0.0827
4	-0.1680	0.4089	0.1660	0.1144	-0.2824	0.0797
5	0.2405	-0.1680	0.4089	0.1398	0.1007	0.0101
6	0.3410	0.2405	-0.1680	0.17	0.171	0.0292
7	0.1698	0.3410	0.2405	0.112	0.0578	0.0033
8	0.7620	0.1698	0.3410	0.1161	0.6459	0.4172
9	-0.2650	0.7620	0.1698	0.1275	-0.3925	0.1541
10	-0.2690	-0.2650	0.7620	0.107	-0.376	0.1414
11	0.0115	-0.2690	-0.2650	0.295	-0.2218	0.0475
12	0.1256	0.0115	-0.2690	0.2036	-0.078	0.0061
13	0.2132	0.1256	0.0115	0.1595	0.0537	0.0029
14	0.0269	0.2132	0.1256	0.1377	-0.1108	0.0123
15	-0.2191	0.0269	0.2132	0.1448	-0.3639	0.1324
16	0.4099	-0.2191	0.0269	0.1901	0.2198	0.0483

17	0.3670	0.4099	-0.2191	0.1602	0.2068	0.0428
18	-0.2059	0.3670	0.4099	0.0893	-0.2952	0.0871
Σ	2.4152					1.3683

الان، لننتقل الى الانموذج غير المقيد (الذي يضم متغيرات متباطئة لكل من المتغير التابع والمستقل):

الانموذج غير المقيد: $y=\beta0+\beta1x1+\beta2x2+\beta3x3+\beta4x4+\epsilon$

	yt-1(x1)	yt-2 (x2)	xt-1 (x3)	xt-2 (x4)
x1= 1	0.3813	0.7994	0.7285	1.7533
1	0.2999	0.3813	-1.3836	0.7285
1	0.1660	0.2999	-3.4100	-1.3836
1	0.4089	0.1660	-0.2154	-3.4100
1	-0.1680	0.4089	-0.4908	-0.2154
1	0.2405	-0.1680	-0.7221	-0.4908
1	0.3410	0.2405	3.1949	-0.7221
1	0.1698	0.3410	-0.6856	3.1949
1	0.7620	0.1698	-0.2270	-0.6856
1	-0.2650	0.7620	-2.6120	-0.2270
1	-0.2690	-0.2650	-0.3665	-2.6120
1	0.0115	-0.2690	-1.9363	-0.3665
1	0.1256	0.0115	-2.2440	-1.9363
1	0.2132	0.1256	-4.1005	-2.2440
1	0.0269	0.2132	-0.2896	-4.1005
1	-0.2191	0.0269	-0.2577	-0.2896
1	0.4099	-0.2191	-0.3559	-0.2577
1	0.3670	0.4099	-2.3740	-0.3559

(18x5)

Obs.	yt	x1	x2	x3	x4	x1²	x1*x2	x1*x3	x1*x4	x2²	x2*x3	x2*x4	x3²	x3*x4	4²
1	0.2999	0.3813	0.7994	0.7285	1.7533	0.1454	0.3048	0.2778	0.6685	0.6390	0.5824	1.4016	0.5307	1.2773	3.0741
2	0.1660	0.2999	0.3813	-1.3836	0.7285	0.0899	0.1144	-0.4149	0.2185	0.1454	-0.5276	0.2778	1.9143	-1.0080	0.5307
3	0.4089	0.1660	0.2999	-3.4100	-1.3836	0.0276	0.0498	-0.5661	-0.2297	0.0899	-1.0227	-0.4149	11.6281	4.7181	1.9143
4	-0.1680	0.4089	0.1660	-0.2154	-3.4100	0.1672	0.0679	-0.0881	-1.3944	0.0276	-0.0358	-0.5661	0.0464	0.7345	11.6281
5	0.2405	-0.1680	0.4089	-0.4908	-0.2154	0.0282	-0.0687	0.0825	0.0362	0.1672	-0.2007	-0.0881	0.2409	0.1057	0.0464
6	0.3410	0.2405	-0.1680	-0.7221	-0.4908	0.0578	-0.0404	-0.1737	-0.1180	0.0282	0.1213	0.0825	0.5214	0.3544	0.2409
7	0.1698	0.3410	0.2405	3.1949	-0.7221	0.1163	0.0820	1.0895	-0.2462	0.0578	0.7684	-0.1737	10.2074	-2.3070	0.5214
8	0.7620	0.1698	0.3410	-0.6856	3.1949	0.0288	0.0579	-0.1164	0.5425	0.1163	-0.2338	1.0895	0.4700	-2.1904	10.2074
9	-0.2650	0.7620	0.1698	-0.2270	-0.6856	0.5806	0.1294	-0.1730	-0.5224	0.0288	-0.0385	-0.1164	0.0515	0.1556	0.4700
10	-0.2690	-0.2650	0.7620	-2.6120	-0.2270	0.0702	-0.2019	0.69218	0.0602	0.5806	-1.9903	-0.1730	6.8225	0.5929	0.0515
11	0.0115	-0.2690	-0.2650	-0.3665	-2.6120	0.0724	0.0713	0.0986	0.7026	0.0702	0.0971	0.6922	0.1343	0.9573	6.8225
12	0.1256	0.0115	-0.2690	-1.9363	-0.3665	0.0001	-0.0031	-0.0223	-0.0042	0.0724	0.5209	0.0986	3.7493	0.7097	0.1343
13	0.2132	0.1256	0.0115	-2.2440	-1.9363	0.0158	0.0014	-0.2819	-0.2432	0.0001	-0.0258	-0.0223	5.0355	4.3451	3.7493
14	0.0269	0.2132	0.1256	-4.1005	-2.2440	0.0455	0.0268	-0.8742	-0.4784	0.0158	-0.5150	-0.2819	16.8141	9.2015	5.0355
15	-0.2191	0.0269	0.2132	-0.2896	-4.1005	0.0007	0.0057	-0.0078	-0.1103	0.0455	-0.0617	-0.8742	0.0839	1.1875	16.8141
16	0.4099	-0.2191	0.0269	-0.2577	-0.2896	0.0480	-0.0059	0.0565	0.0635	0.0007	-0.0069	-0.0078	0.0664	0.0746	0.0839
17	0.3670	0.4099	-0.2191	-0.3559	-0.2577	0.1680	-0.0898	-0.1459	-0.1056	0.0480	0.0780	0.0565	0.1267	0.0917	0.0664
18	-0.2059	0.3670	0.4099	-2.3740	-0.3559	0.1347	0.1504	-0.8713	-0.1306	0.1680	-0.9731	-0.1459	5.6359	0.8449	0.1267
Σ	2.4152	3.0024	3.4348	-17.7476	-13.6203	1.7973	0.6520	-1.4385	-1.2912	2.3016	-3.4639	0.8344	64.0794	19.8454	61.5176

$$x^Tx = \begin{matrix} n & \sum x1 & \sum x2 & \Sigma x3 & \Sigma x4 \\ \sum x1 & \sum x1^2 & \sum x1x2 & \Sigma x1x3 & \Sigma x1x4 \\ \sum x2 & \sum x2x1 & \sum x2^2 & \Sigma x2x3 & \Sigma x2x4 \\ \Sigma x3 & \Sigma x3x1 & \Sigma x3x2 & \Sigma x3^2 & \Sigma x3x4 \\ \Sigma x4 & \Sigma x4x1 & \Sigma x4x2 & \Sigma x4x3 & \Sigma x4^2 \end{matrix} = \begin{matrix} 18 & 3.0024 & 3.4348 & -17.7476 & -13.6203 \\ 3.0024 & 1.7973 & 0.6520 & -1.4385 & -1.2912 \\ 3.4348 & 0.6520 & 2.3016 & -3.4639 & 0.8344 \\ -17.7476 & -1.4385 & -3.4639 & 64.0794 & 19.8454 \\ -13.6203 & -1.2912 & 0.8344 & 19.8454 & 61.5176 \end{matrix}$$

$$xTy = \sum y = 2.4152$$

الان، نجد x^Ty:

∑x1y 0.2716
∑x2y 0.2580
∑x3y -1.4709
∑x4y 3.1985

حساب مُحدِّد المصفوفة 5×5 A باستخدام طريقة الحذف الغاوسي:

Step 1: Eliminate below a11=18
New Row 2: Row 2−(3.0024/18=0.1668) * Row 1
3.0024-0.1668*18=0
1.7973−0.1668*3.0024=1.2965, 0.6520−0.1668*3.4348=0.0791
−1.4385−0.1668*(−17.7476)=1.5218, −1.2912−0.1668* (−13.6203) =0.9807
Updated Row 2: [0,1.2965,0.0791,1.5218,0.9807]
New Row 3: Row 3−(3.4348/18=0.1908) * Row 1
3.4348-0.1908*18≈0
0.6520−0.1908*3.0024=0.0791, 2.3016−0.1908*3.4348=1.6462
−3.4639−0 Updated Row 3: [0,0.0791,1.6462,−0.0777,3.4332]
New Row 4: Row 4−(−17.7476/18= −0.9860)* Row 1
-17.7476-(-0.9860)*18≈0
−1.4385−(−0.9860)*3.0024=1.5219, −3.4639−(−0.9860) *3.4348= −0.0772

Obs.	yt	x1	x2	x3	x4	x1*y	x2*y	x3*y	x4*y
1	0.2999	0.3813	0.7994	0.7285	1.7533	0.1144	0.2397	0.2185	0.5258
2	0.1660	0.2999	0.3813	-1.3836	0.7285	0.0498	0.0633	-0.2297	0.1209
3	0.4089	0.1660	0.2999	-3.4100	-1.3836	0.0679	0.1226	-1.3944	-0.5658
4	-0.1680	0.4089	0.1660	-0.2154	-3.4100	-0.0687	-0.0279	0.0362	0.5729
5	0.2405	-0.1680	0.4089	-0.4908	-0.2154	-0.0404	0.0983	-0.1180	-0.0518
6	0.3410	0.2405	-0.1680	-0.7221	-0.4908	0.0820	-0.0573	-0.2462	-0.1674
7	0.1698	0.3410	0.2405	3.1949	-0.7221	0.0579	0.0408	0.5425	-0.1226
8	0.7620	0.1698	0.3410	-0.6856	3.1949	0.1294	0.2598	-0.5224	2.4345
9	-0.2650	0.7620	0.1698	-0.2270	-0.6856	-0.2019	-0.045	0.0602	0.1817
10	-0.2690	-0.2650	0.7620	-2.6120	-0.2270	0.0713	-0.2050	0.7026	0.0611
11	0.0115	-0.2690	-0.2650	-0.3665	-2.6120	-0.0031	-0.0031	-0.0042	-0.0300
12	0.1256	0.0115	-0.2690	-1.9363	-0.3665	0.0014	-0.0338	-0.2432	-0.0460
13	0.2132	0.1256	0.0115	-2.2440	-1.9363	0.0268	0.0025	-0.4784	-0.4128
14	0.0269	0.2132	0.1256	-4.1005	-2.2440	0.0057	0.0034	-0.1103	-0.0604
15	-0.2191	0.0269	0.2132	-0.2896	-4.1005	-0.0059	-0.0467	0.0635	0.8984
16	0.4099	-0.2191	0.0269	-0.2577	-0.2896	-0.0898	0.0110	-0.1056	-0.1187
17	0.3670	0.4099	-0.2191	-0.3559	-0.2577	0.1504	-0.0804	-0.1306	-0.0946
18	-0.2059	0.3670	0.4099	-2.3740	-0.3559	-0.0756	-0.0844	0.4888	0.0733
Σ	2.4152	3.0024	3.4348	-17.7476	-13.6203	0.2716	0.2580	-1.4709	3.1985

64.0794−(−0.9860)*(−17.7476)=46.5803, 19.8454−(−0.9860)*(−13.6203)=6.4158
Updated Row 4: [0,1.5219,−0.0772,46.5803,6.4158]
New Row 5: Row 5−(−13.6203/18= −0.7567)* Row 1
-13.6203-(-0.7567)*18≈0
−1.2912−(−0.7567)*3.0024=0.9807, 0.8344−(−0.7567)*3.4348=3.4335
19.8454−(−0.7567)*(−17.7476)=6.4158, 61.5176−(−0.7567) *(−13.6203)=51.2111
Updated Row 5: [0,0.9807,3.4335,6.4158,51.2111]
Matrix After Step 1:

18	3.0024	3.4348	−17.7476	−13.6203
0	1.2965	0.0791	1.5218	0.9807
0	0.0791	1.6462	−0.0777	3.4332
0	1.5219	−0.0772	46.5803	6.4158
0	0.9807	3.4335	6.41458	1.2111

Step 2: Eliminate below a22=1.2965
.1908*(−17.7476)=−0.0777, 0.8344−0.1908*(−13.6203)=3.433
New Row 3: Row 3−(0.0791/1.2965=0.0610) * Row 2
0.0791-0.0610*1.2965≈0, 1.6462−0.0610*0.0791=1.6414,
−0.0777−0.0610*1.5218=−0.1705, 3.4332−0.0610*0.9807=3.3730
Updated Row 3: [0,0,1.6414,−0.1705,3.3730]
New Row 4: Row 4−(1.5219/1.2965=1.1739) * Row 2
1.5219-1.1739*1.2965≈0, −0.0772−1.1739*0.0791=−0.1701,
46.5803−1.1739*1.5218=44.7939, 6.4158−1.1739*0.9807=5.2646
Updated Row 4: [0,0,−0.1701,44.7939,5.2646]
New Row 5: Row 5−(0.9807/1.2965=0.7564) * Row 2

09807-0.7564*1.2965≈0, 3.4335−0.7564*0.0791=3.3737
6.4158−0.7564*1.5218=5.2647, 51.2111−0.7564*0.9807=50.4693
Updated Row 5: [0,0,3.3737,5.2647,50.4693]
Matrix After Step 2:

18	3.0024	3.4348	−17.7476	−13.6203
0	1.2965	0.0791	1.5218	0.9807
0	0	1.6414	−0.1705	3.3730
0	0	−0.1701	44.7939	5.2646
0	0	3.3737	5.2647	50.4693

Step 3: Eliminate below a33=1.6414
New Row 4: Row 4−(−0.1701/1.6414= −0.1036)* Row 3
-0.1701-(-0.1036)*1.6414≈0, 44.7939−(−0.1036)* (−0.1705) =44.7762
5.2646−(−0.1036)*3.3730=5.6140
Updated Row 4: [0,0,0,44.7762,5.6140]
New Row 5: Row 5−(3.37401.6414=2.0556) * Row 3
3.3737-2.0554*1.6414≈0, 5.2647−2.0554×(−0.1705)=5.6151
50.4693−2.0554*3.3730=43.5364
Updated Row 5: [0,0,0,5.6151,43.5364]
Matrix After Step 3:

18	3.0024	3.4348	−17.7476	−13.6203
0	1.2965	0.0791	1.5218	0.9807
0	0	1.6414	−0.1705	3.3730
0	0	0	44.7762	5.6140
0	0	0	5.6151	43.5364

Step 4: Eliminate below a44=44.7762
New Row 5: Row 5−(5.61564/4.7767=0.1254) * Row 4
5.6151-0.1254*44.7762≈0,
43.5364−0.1254*5.6140≈43.5333−0.7038=42.8323
Updated Row 5: [0,0,0,0,42.8323]
Final Upper Triangular Matrix U:

U= 18	3.0024	3.4348	−17.7476	−13.6203
0	1.2965	0.0791	1.5218	0.9807
0	0	1.6414	−0.1705	3.3730
0	0	0	44.7762	5.6140
0	0	0	0	42.8323

det(A)=18*1.2965*1.6414*44.7762*42.8323 ≈73,464.594

L =	1	0	0	0	0
	0.1668	1	0	0	0
	0.1908	0.0610	1	0	0
	−0.9860	1.1739	−0.1036	1	0
	−0.7567	0.7564	2.0556	0.1254	1

التحقق من صحة قيمة المحدد، عن طريق ضرب المصفوفة الدنيا L، التي يكون قطرها واحد وقيمها السفلى تمثل المضاعفات المحتسبة من حساب المُحدد، بالمصفوفة العليا U المتحصلة من حساب المحدد، للحصول على المصفوفة الاصلية A. حساب A=L*U:

A= L*U =	1	0	0	0	0 *	18	3.0024	3.4348	−17.7476	−13.6203
	0.1668	1	0	0	0	0	1.2965	0.0791	1.5218	0.9807
	0.1908	0.0610	1	0	0	0	0	1.6414	−0.1705	3.373
	−0.9860	1.1739	−0.1036	1	0	0	0	0	44.7762	5.6140
	−0.7567	0.7564	2.0556	0.1254	1	0	0	0	0	42.8323

الخطوة الأولى: ضرب المصفوفات L * U: لنقم بعملية الضرب صفًا صفًا:
Row 1: [1, 0, 0, 0, 0] * U = [18, 3.0024, 3.4348, -17.7476, -13.6203]
Row 2: [0.1668, 1, 0, 0, 0] * U:
Element (2,1): 0.1668*18 + 1×0 = 3.0024
Element (2,2): 0.1668*3.0024 + 1×1.2965 = 0.5008 + 1.2965 = 1.7973
Element (2,3): 0.1668*3.4348 + 1×0.0791 = 0.5729 + 0.0791 = 0.6520

Element (2,4): 0.1668*(-17.7476) + 1×1.5218 = -2.9591 + 1.5218 = -1.4373
Element (2,5): 0.1668*(-13.6203) + 1×0.9807 = -2.2719 + 0.9807 = -1.2912
Row 3: [0.1908, 0.0610, 1, 0, 0] * U:
Element (3,1): 0.1908×18 + 0.0610×0 + 1*0 = 3.4344
Element (3,2): 0.1908×3.0024 + 0.0610×1.2965 + 1*0 = 0.5729 + 0.0791 = 0.6520
Element (3,3): 0.1908*3.4348 + 0.0610*0.0791 + 1*1.6414 = 0.6554 + 0.0048 + 1.6414 = 2.3016
Element (3,4): 0.1908*(-17.7476) + 0.0610*1.5218 + 1*(-0.1705) = -3.3864 + 0.0928 - 0.1705 = -3.4641
Element (3,5): 0.1908*(-13.6203) + 0.0610*0.9807 + 1*3.3730 = -2.5984 + 0.0598 + 3.3730 = 0.8344
Row 4: [-0.9860, 1.1739, -0.1036, 1, 0] * U:
Element (4,1): -0.9860*18 + 1.1739×0 + (-0.1036)*0 + 1×0 + 0*0 = -17.7480
Element (4,2): -0.9860*3.0024 + 1.1739*1.2965 + (-0.1036)*0 + 1*0 + 0*0 = -2.9604 + 1.5218 = -1.4386
Element (4,3): -0.9860*3.4348 + 1.1739*0.0791 + (-0.1036)*1.6414 + 1*0 + 0*0 = -3.3864 + 0.0928 - 0.1700 = -3.4636
Element (4,4): -0.9860*(-17.7476) + 1.1739*1.5218 + (-0.1036)*(-0.1705) + 1*44.7762 + 0*0 = 17.4994 + 1.7868 + 0.0177 + 44.7762 = 64.0801
Element (4,5): -0.9860*(-13.6203) + 1.1739*0.9807 + (-0.1036)*3.3730 + 1*5.6140 + 0*0 = 13.4296 + 1.1512 - 0.3494 + 5.6140 = 19.8454
Row 5: [-0.7567, 0.7564, 2.0556, 0.1254, 1] * U:
Element (5,1): -0.7567*18 + 0.7564*0 + 2.0556*0 + 0.1254*0 + 1*0 = -13.6206 Element (5,2): -0.7567*3.0024 + 0.7564*1.2965 + 2.0556*0 + 0.1254*0 + 1*0 = -2.2719 + 0.9809 = -1.2910
Element (5,3): -0.7567*3.4348 + 0.7564*0.0791 + 2.0556*1.6414 + 0.1254*0 + 1*0 = -2.5986 + 0.0598 + 3.3740 = 0.8352
Element (5,4): -0.7567*(-17.7476) + 0.7564*1.5218 + 2.0556*(-0.1705) + 0.1254*44.7762 + 1*0 = 13.4261 + 1.1511 - 0.3505 + 5.6143 = 19.8410
Element (5,5): -0.7567*(-13.6203) + 0.7564*0.9807 + 2.0556*3.3730 + 0.1254*5.6140 + 1*42.8323 = 10.3075 + 0.7418 + 6.9323 + 0.7046 + 42.8323 = 61.5185

الخطوة 2: حساب المحدد: بما أن L مصفوفة مثلثية سفلية تحتوي على 1 على القطر الرئيسي، فإن محددها يساوي 1. محدد U (مصفوفة مثلثية علوية) هو حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي :

det(U) = 18 * 1.2965 * 1.6414 * 44.7762 * 42.8323

بالتالي، فإن محدد المصفوفة الأصلية هو:

det (Original) = det(L) * det(U) = 1 * det(U) = 18 * 1.2965 * 1.6414 * 44.7762 * 42.8323=73,464.594

إيجاد العوامل المرافقة لمصفوفة من الرتبة 5×5 باستخدام طريقة توسيع لابلاس. المصفوفة هي:

A = 18	3.0024	3.4348	-17.7476	-13.6203
3.0024	1.7973	0.6520	-1.4385	-1.2912
3.4348	0.6520	2.3016	-3.4639	0.8344
-17.7476	-1.4385	-3.4639	64.0794	19.8454
-13.6203	-1.2912	0.8344	19.8454	61.5176

يتم الحصول على M11 عن طريق حذف الصف 1 والعمود 1 من المصفوفة A:

M11= 1.7973	0.6520	-1.4385	-1.2912	
0.6520	2.3016	-3.4639	0.8344	
-1.4385	-3.4639	64.0794	19.8454	
-1.2912	0.8344	19.8454	61.5176	

حساب det(M11). يمكننا حسابه باستخدام متسلسلة لابلاس على طول صف أو عمود. لنقم بالتوسيع على طول الصف الأول.

det(M11) = 1.7973 * det M11(1,1) - 0.6520 * det M11(1,2) + (-1.4385) * det M11(1,3) - (-1.2912) * det M11(1,4)

حيث M11(i,j) هي المصفوفة الفرعية 3x3 من M11 بعد حذف الصف i والعمود j. إذن،

نحتاج إلى حساب أربع محددات من الرتبة 3×3.

لنحسب det M11(1,1): المصفوفة الفرعية بعد حذف الصف الأول والعمود الأول:

det M11(1,1) = 2.3016 -3.4639 0.8344
-3.4639 64.0794 19.8454
0.8344 19.8454 61.5176

detM11(1,1) = 2.3016 [64.0794*61.5176 –19.8454*19.8454] -(-3.4639) [(-3.4639)*61.5176 - 0.8344*19.8454] +0.8344 [(-3.4639)*19.8454- 0.8344*64.0794]
= 7,269.014

det M11(1,2) = 0.6520 -3.4639 0.8344
-1.4385 64.0794 19.8454
-1.2912 19.8454 61.5176

detM11(1,2) =0.6520 [64.0794*61.5176 -19.8454*19.8454] -(-3.4639)*[(-1.4385) *61.5176 - (-1.2912)*19.8454] +0.8344 [(-1.4385)*19.8454- (-1.2912)*64.0794]
= 2,140.854

det M11(1,3) = 0.6520 2.3016 0.8344
-1.4385 -3.4639 19.8454
-1.2912 0.8344 61.5176

detM11(1,3) =0.6520 [(-3.4639)*61.5176 -0.8344*19.8454] -2.3016 [(-1.4385) *61.5176 -(-1.2912)*19.8454] +0.8344 [(-1.4385)*0.8344- (-1.2912)*(-3.4639)]
= -9.767

det M11(1,4) = 0.6520 2.3016 -3.4639
-1.4385 -3.4639 64.0794
-1.2912 0.8344 19.8454

detM11(1,4) =0.6520 [(-3.4639)*19.8454-0.8344*64.0794] -2.3016 [(-1.4385) *19.8454-(-1.2912)*64.0794] +(-3.4639)[(-1.4385)*0.8344- (-1.2912)*(-3.4639)] = -184.759

det(M11) = 1.7973 * det M11(1,1) - 0.6520 * det M11(1,2) + (-1.4385) * det M11(1,3) - (-1.2912) * det M11(1,4)=1.7973 * 7,269.013- 0.6520 * 2,140.852+ (-1.4385) * (-9.767) - (-1.2912) * (-184.756)= 11,444.254

Cij=(-1)i+j * det (Mij) = C11 = (-1)1+1 * det(M11) = +11,444.24

حساب العنصر C12: يتم الحصول على M12 عن طريق حذف الصف 1 والعمود 2 من المصفوفة A:

M12= 3.0024 0.6520 −1.4385 −1.2912
3.4348 2.3016 −3.4639 0.8344
−17.7476 −3.4639 64.0794 19.8454
−13.6203 0.8344 19.8454 61.5176

det (M12(1,1)) = 2.3016 -3.4639 0.8344
-3.4639 64.0794 19.8454
0.8344 19.8454 61.5176

det (M12(1,1))= 2.3016[64.0794*61.5176-19.84542]-(-3.4639)[(-3.4639)*61.5176-0.8344*19.8454]+ 0.8344[(-3.4639)*19.8454-0.8344* 64.0794] =7,269.014

det (M12(1,2)) = 3.4348 −3.4639 0.8344
−17.7476 64.0794 19.8454
-13.6203 19.8454 61.5176

det (M12(1,2)) =3.4348[(64.0794*61.5176-19.84542)] -(−3.4639)[(−17.7476*61.5176-(-13.6203)*19.8454)] +0.8344[(−17.7476)*19.8454-(-13.6203)*64.0794)]=9,776.066

det (M12(1,3)) = 3.4348 2.3016 0.8344
-17.7476 -3.4639 19.8454
-13.6203 0.8344 61.5176

det (M12(1,3))=3.4348[(-3.4639)*61.5176-0.8344*19.8454)]-2.3016[(-17.7476)*61.5176-(-13.6203)*19.8454)]+0.8344[(-17.7476)*0.8344 –(-13.6203)*(-3.4639)]= 1,050.216

det (M12(1,4))= 3.4348 2.3016 -3.4639
-17.7476 -3.4639 64.0794
-13.6203 0.8344 19.8454

det (M12(1,4))=3.4348[(-3.4639)*19.8454-0.8344*64.0794] -2.3016[(-17.7476)*19.8454-(-13.6203)* 64.0794]+(-3.4639)[(-17.7476)*0.8344 –(-13.6203)*(-3.4639)] = -1,403.2

det(M12) = 3.0024 * det M12(1,1) - 0.6520 * det M12(1,2) + (-1.4385) * det M12(1,3) - (-

1.2912) * det M12(1,4)=3.0024 * 7,269.014- 0.6520 * 9,776.066+ (-1.4385) * 1,050.216- (-1.2912) * (-1,403.2)= 12,127.95

Cij=(-1)i+j * det (Mij) = C12 = (-1)1+2 * det(M12) = -12,127.95

حساب العنصر C13: يتم الحصول على M13 عن طريق حذف الصف 1 والعمود 3 من المصفوفة A:

M13= 3.0024 1.7973 −1.4385 −1.2912
3.4348 0.6520 −3.4639 0.8344
−17.7476 −1.4385 64.0794 19.8454
−13.6203 -1.2912 19.8454 61.5176

det (M13(1,1)) = 0.6520 -3.4639 0.8344
-1.4385 64.0794 19.8454
-1.2912 19.8454 61.5176

det (M13(1,1))= 0.6520[64.0794*61.5176-19.84542]-(-3.4639)[(-1.4385)*61.5176-(-1.2912)*19.8454]+ 0.8344[(-1.4385)*19.8454-(-1.2912)* 64.0794] = 2,140.854

det (M13(1,2)) = 3.4348 −3.4639 0.8344
−17.7476 64.0794 19.8454
-13.6203 19.8454 61.5176

det (M13(1,2)) =3.4348[64.0794*61.5176-19.84542] -(−3.4639)[(−17.7476)*61.5176-(-13.6203)*19.8454] +0.8344[(−17.7476)*19.8454-(-13.6203)*64.0794] =9,776.066

det (M13(1,3)) = 3.4348 0.6520 0.8344
-17.7476 -1.4385 19.8454
-13.6203 -1.2912 61.5176

det (M13(1,3))=3.4348[(-1.4385)*61.5176-(-1.2912)*19.8454]-0.6520[(-17.7476)*61.5176-(-13.6203)*19.8454]+0.8344[(-17.7476)*-1.2912 –(-13.6203)*(-1.4385)] = 322.442

det (M13(1,4))= 3.4348 0.6520 -3.4639
-17.7476 -1.4385 64.0794
-13.6203 -1.2912 19.8454

det (M13(1,4))=3.4348[(-1.4385)*19.8454-(-1.2912)*64.0794] -0.6520[(-17.7476)*19.8454-(-13.6203)* 64.0794]+(-3.4639)[(-17.7476)*(-1.2912) –(-13.6203)*(-1.4385)] = -164.766

det(M13) = 3.0024 * det M13(1,1) – 1.7973 * det M13(1,2) + (-1.4385) * det M13(1,3) - (-1.2912) * det M13(1,4)=3.0024 * 2,140.854- 1.7973 * 9,776.066+ (-1.4385) * 322.442 - (-1.2912 * (-164.766) = -11,819.4

Cij=(-1)i+j * det (Mij) = C13 = (-1)1+3 * det(M13) = -11,819.4

حساب العنصر C14: يتم الحصول على M14 عن طريق حذف الصف 1 والعمود 4 من المصفوفة A:

M14= 3.0024 1.7973 0.6520 -1.2912
3.4348, 0.6520 2.3016 0.8344
-17.7476 -1.4385 -3.4639 19.8454
-13.6203 -1.2912 0.8344 61.5176

det (M14(1,1)) = 0.6520 2.3016 0.8344
-1.4385 -3.4639 19.8454
-1.2912 0.8344 61.5176

det (M14(1,1))= 0.6520[(-3.4639)*61.5176-0.8344*19.8454]- 2.3016 [(-1.4385)*61.5176-(-1.2912)*19.8454]+ 0.8344[(-1.4385)*0.8344-(-1.2912)* (-3.4639)] = -9.767

det (M14(1,2)) = 3.4348 2.3016 0.8344
−17.7476 -3.4639 19.8454
-13.6203 0.8344 61.5176

det (M14(1,2)) =3.4348[(-3.4639)*61.5176-0.8344*19.8454] - 2.3016 [(−17.7476)*61.5176-(-13.6203)*19.8454] +0.8344[(−17.7476)*0.8344-(-13.6203)*(-3.4639)] = 1,050.216

det (M14(1,3)) = 3.4348 0.6520 0.8344
-17.7476 -1.4385 19.8454
-13.6203 -1.2912 61.5176

det (M14(1,3))=3.4348[(-1.4385)*61.5176-(-1.2912)*19.8454]-0.6520[(-17.7476)*61.5176-(-13.6203)*19.8454]+0.8344[(-17.7476)*(-1.2912) –(-13.6203)*(-1.4385)] = 322.442

det (M14(1,4))= 3.4348 0.6520 2.3016
-17.7476 -1.4385 -3.4639

-13.6203 -1.2912 0.8344

det (M14(1,4))=3.4348[(-1.4385)*0.8344-(-1.2912)*(-3.4639)] -0.6520[(-17.7476)*0.8344-(-13.6203)* (-3.4639)]+ 2.3016 [(-17.7476)*(-1.2912) –(-13.6203)*(-1.4385)] = 28.579

det(M14) = 3.0024 * det M14(1,1) – 1.7973 * det M14(1,2) + 0.6520* det M14(1,3) - (-1.2912) * det M14(1,4)=3.0024 * (-9.767)- 1.7973 * 1,050.216 + 0.6520* 322.442 - (-1.2912) * 28.579= -1,669.74

Cij=(-1)i+j * det (Mij) = C14 = (-1)1+4 * det(M14) = +1,669.74

حساب العنصر C15: يتم الحصول على M15 عن طريق حذف الصف 1 والعمود 5 من المصفوفة A:

M15= 3.0024 1.7973 0.6520 -1.4385
3.4348, 0.6520 2.3016 -3.4639
-17.7476 -1.4385 -3.4639 64.0794
-13.6203 -1.2912 0.8344 19.8454

det (M15(1,1)) = 0.6520 2.3016 -3.4639
-1.4385 -3.4639 64.0794
-1.2912 0.8344 19.8454

det (M15(1,1))= 0.6520[(-3.4639)*19.8454 -0.8344 *64.0794]- 2.3016 [(-1.4385)*19.8454-(-1.2912)*64.0794]+ (-3.4639)[(-1.4385)*0.8344-(-1.2912)* (-3.4639)] = -184.759

det (M15(1,2)) = 3.4348 2.3016 -3.4639
−17.7476 -3.4639 64.0794
-13.6203 0.8344 19.8454

det (M15(1,2)) =3.4348[(-3.4639)*19.8454 -0.8344*64.0794] - 2.3016 [(−17.7476)*19.8454 - (-13.6203)*64.0794] +(-3.4639)[(−17.7476)*0.8344-(-13.6203)*(-3.4639)] = -1,403.2

det (M15(1,3)) = 3.4348 0.6520 -3.4639
-17.7476 -1.4385 64.0794
-13.6203 -1.2912 19.8454

det (M15(1,3))=3.4348[(-1.4385)*19.8454-(-1.2912)*64.0794]-0.6520[(-17.7476)*19.8454-(-13.6203)*64.0794]+(-3.4639)[(-17.7476)*(-1.2912) –(-13.6203)*(-1.4385)] = -164.786

det (M15(1,4))= 3.4348 0.6520 2.3016
-17.7476 -1.4385 -3.4639
-13.6203 -1.2912 0.8344

det (M15(1,4))=3.4348[(-1.4385)*0.8344-(-1.2912)*(-3.4639)] -0.6520[(-17.7476)*0.8344-(-13.6203)* (-3.4639)]+ 2.3016 [(-17.7476)*(-1.2912) –(-13.6203)*(-1.4385)] = 28.579

det(M15) = 3.0024 * det M15(1,1) – 1.7973 * det M15(1,2) + 0.6520* det M15(1,3) - (-1.4385) * det M15(1,4)=3.0024 * (-184.759)- 1.7973 * (-1,403.2)+ 0.6520 * (-164.786) - (-1.4385) * 28.579= 1,900.921

Cij=(-1)i+j * det (Mij) = C15 = (-1)1+5 * det(M15) = 1,900.921

التحقق: $\sum_{j=1}^{5} a1j * C1j = \det(A)$

a11=18, a12=3.0024, a13=3.4348, a14=−17.7476, a15=−13.6203

C11=11,444.254, C12=-12,127.95, C13=-11,819.4, C14=1,669.74,C15=1,900.921

det A=a11*C11+a12*C12+a13*C13+a14*C14+a15*C15

73,464.594= 18*11,444.24 +3.0024*(-12,127.95)+3.4348*(-11,819.4) + (−17.7476)*1,669.74+(−13.6203)*1,900.921

73,464.594 ≈ 73,461.1

هكذا يتم الحصول على بقية العوامل، التي لم يتم ذكرها جميعا، لأنها تتطلب صفحات كثيرة، انما يمكن وضعها في ملحق للبحث. الآن، لنجمع جميع العوامل المساعدة الـ 25 Cij في مصفوفة 5×5 A.

Cof(A)=C11 C12 C13 C14 C15= 11,444.24 -12,127.95 -11,819.4 1,669.74 1,900.921
C21 C22 C23 C24 C25 -12,127.96 59,512.6 -1,217.06 -1,832.2 -828.501
C31 C32 C33 C34 C35 -11,819.4 -1,216.706 52,112.3 582.899 -3,547.59
C41 C42 C43 C44 C45 1,669.74 -1,832.2 614.833 1,667.58 -215.916
C51 C52 C53 C54 C55 1,900.863 -828.492 -3,547.6 -215.070 1,715.069

منقول مصفوفة العوامل المساعدة، والتي تُسمى المصفوفة المرافقة (adj (A)، هو:

Cof(A)=[Cof(A)]T= 11,444.24 -12,127.96 -11,819.4 1,669.74 1,900.863
-12,127.95 59,512.6 -1,216.706 -1,832.2 -828.492

-11,819.4	-1,217.06	52,112.3	614.833	-3,547.6
1,669.74	-1,832.2	582.899	1,667.58	-215.070
1,900.921	-828.501	-3,547.59	-215.916	1,715.069

يمكن حساب معكوس المصفوفة A باستخدام الصيغة: A^{-1}=[1/det(A)]*adj(A)، عن طريق قسمة كل عنصر من عناصر المصفوفة المرافقة adj(A) على قيمة المحدد det(A) البالغة 73,464.594.

A−1= 0.15578	-0.16509	-0.16089	0.02273	0.02587
-0.16509	0.81009	-0.01656	-0.02494	-0.01128
-0.16089	-0.01657	0.70935	0.00837	-0.04829
0.02273	-0.02494	0.00793	0.02270	-0.00293
0.02588	-0.01128	-0.04829	-0.00294	0.02335

التحقق من أن A-1*A=I (مصفوفة الوحدة)مما يعني أن العناصر القطرية يجب أن تكون 1 وجميع العناصر غير القطرية 0. سأقوم بثبات ذلك بالمثلث العلوي من المصفوفة، لان المثلث السفلي لها ذاته.

(A-1*A)1,1=Row 1 of A-1*Column 1 of A=0.15578*18+(-0.16509)*3.0024+(-0.16089)*3.4348+0.02273*(-17.7476)+0.02588*(-13.6203) ≈ 1

(A-1*A)1,2=Row 1 of A-1*Column 2 of A=0.15578*3.0024+(-0.16509)* 1.7973+(-0.16089)*0.6520+0.02273*(-1.4385)+0.02588*(-1.2912) ≈ 0

(A-1*A)1,3= Row 1 of A-1*Column 3 of A=0.15578*3.4348+(-0.16509)* 0.6520+(-0.16089)*2.3016+0.02273*(-3.4639)+0.02588*0.8344 ≈ 0

(A-1*A)1,4= Row 1 of A-1*Column 4 of A=0.15578*(-17.7476)+(-0.16509)*(-1.4385)+(-0.16089)*(-3.4639)+0.02273*64.0794+0.02588*19.8454 ≈ 0

(A-1*A)1,5= Row 1 of A-1*Column 5 of A=0.15578*(-13.6203)+(-0.16509)*(-1.2912)+(-0.16089)*08344+0.02273*19.8454+0.02588*61.5176 ≈ 0

So, Row 1 is: [1.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000]

(A-1*A)2,2= Row 2 of A-1* Column 2 of A=(-0.1651)*3.0024+ (0.81009)* 1.7973 +(-0.01656)*0.6520+(-0.02494)*(-1.4385)+(-0.01128)*(-1.2912) ≈ 1

(A-1*A)2,3=Row 2 of A-1* Column 3 of A=(-0.16509)*3.4348+ (0.81009)* 0.6520+(-0.01656)*2.3016+(-0.02494)*(-3.4639)+(-0.01128)*0.8344 = 0

(A-1*A)2,4=Row 2 of A-1* Column 4 of A=(-0.16509)*(-17.7476)+(0.81009)*(-1.4385)+(-0.01656)*(-3.4639)+(-0.02494)*64.0794+(-0.01128)*19.8454 =0

(A-1*A)2,5=Row 2 of A-1* Column 5 of A=(-0.16509)*(-13.6203)+(0.81009)*(-1.2912)+(-0.01656)*0.8344+(-0.02494)*19.8454+(-0.01128)*61.5176 ≈ 0

So, Row 2 is: [0.0000, 1.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000]

(A-1*A)3,3= Row 3 of A-1* Column 3 of A=(-0.16089)*3.4348+(-0.01657)* 0.6520+0.70935*2.3016+0.00837*(-3.4639)+(-0.04829)* 0.8344 ≈ 1

(A-1*A)3,4= Row 3 of A-1* Column 4 of A=(-0.16089)*(-17.7476)+(-0.01657)* (-1.4385)+0.70935*(-3.4639)+0.00837*64.0794+(-0.04829)*19.8454 ≈ 0

(A-1*A)3,5= Row 3 of A-1* Column 5 of A=(-0.16089)*(-13.6203)+(-0.01657)* (-1.2912)+0.70935*0.8344+0.00837*19.8454+(-0.04829)*61.5176 ≈ 0

So, Row 3 is: [0.0000, 0.0000, 1.0000, 0.0000, 0.0000]

(A-1*A)4,4= Row 4 of A-1* Column 4 of A=0.02273*(-17.7476)+(-0.02494)* (-1.4385)+0.00793*(-3.4639)+0.02270*64.0794+(-0.00293)*19.8454 ≈ 1

(A-1*A)4,5= Row 4 of A-1* Column 5 of A=0.02273*(-13.6203)+(-0.02494)* (-1.2912)+0.00793*0.8344+0.02270*19.8454+(-0.00293)*61.5176 ≈ 0

So, Row 4 is: [0.0000, 0.0000, 0.0000, 1.0000, 0.0000]

(A-1*A)5,5= Row 5 of A-1* Column 5 of A=0.02588*(-13.6203)+(-0.01128)* (-1.2912)+(-0.04829)*0.8344+(-0.00294)*19.8454+(-0.02335)*61.5176 ≈ 1

So, Row 5 is: [0.0000, 0.0000, 0.0000, 0.0000, 1.0000]

β=A−1*xTy= 0.15578 -0.16509 -0.16089 0.02273 0.02587 * 2.4152

-0.16509	0.81009	-0.01656	-0.02494	-0.01128	0.2716
-0.16089	-0.01657	0.70935	0.00837	-0.04829	0.2580
0.02273	-0.02494	0.00793	0.02270	-0.00293	-1.4709
		0.02588	-0.01128	-0.04829	-0.00294	0.02335

3.1985حساب كل عنصر من عناصر β باستخدام الصيغة $\beta_i = \sum_{j=1}^{5} (A^{-1})_{ij} * (x^T y)_j$:

β_1= (row 1* column)=0.15578*2.4152+(-0.16509)*0.2716+(-0.16089) *0.2580 +0.02273*(-1.4709)+0.02587*3.1985= 0.33921

β_2= (row 2* column)=(-0.16509)*2.4152+0.81009*0.2716+(-0.01656)*0.2580+(-0.02494)*(-1.4709)+(-0.01128)*3.1985= -0.18238

β_3= (row 3* column)=(-0.16089)*2.4152+(-0.01657)* 0.2716+ 0.70935 *0.2580 +0.00837*(-1.4709)+(-0.04829)*3.1985= -0.37684

β_4= (row 4* column)=0.02273*2.4152+(-0.02494)*0.2716+ 0.00793* 0.2580+ 0.02270*(-1.4709)+(-0.00293)*3.1985= 0.00742

β_5= (row 5* column)=0.02588*2.4152+(-0.01128)*0.2716+(-0.04829)*0.2580+(-0.00294)*(-1.4709)+0.02335*3.1985= 0.12599

متجه β النهائي:

$$\beta = \begin{matrix} 0.33921 \\ -0.18238 \\ -0.37684 \\ 0.00742 \\ 0.12599 \end{matrix}$$

هذا يعطينا معادلة الانحدار المقدرة: $\hat{y}=\beta 1+\beta 2x1+\beta 3x2+\beta 4x3+\beta 5x4$

$\hat{y}=0.339-0.182\ x1-0.377\ x2+0.007\ x3+0.126\ x4$

للتحقق من صحة عناصر β ، نستخدم الصيغة الاتية: $\beta=A\text{-}1*xTy,\ \beta*A\text{-}1=xTy$

Row 1 of A-1*β=18*0.33921+3.0024*(-0.18238)+3.4348*(-0.37684)+(-17.7476)*0.00742+(-13.6203)*0.12599 ≈ 2.4161

R2 of A-1*β=3.0024*0.33921+1.7973*(-0.18238)+0.6520*(-0.37684)+(-1.4385)*0.00742+(-1.2912)*0.12599 ≈ 0.3444

R3 of A-1*β=3.4348*0.33921+0.6520*(-0.18238)+2.3016*(-0.37684)+(-3.4639)*0.00742+(0.8344)*0.12599 ≈ 0.2583

R4 of A-1*β=(-17.7476)*0.33921+(-1.4385)*(-0.18238)+(-3.4639)*(-0.37684)+(64.0794)*0.00742+(19.8454)*0.12599 ≈ 1.4767

R4 of A-1*β=(-13.6203)*0.33921+(-1.2912)*(-0.18238)+(0.8344)*(-0.37684)+(19.8454
)*0.00742+(61.5176)*0.12599 ≈ 3.8276

Obs.	yt	x1	x2	x3	x4	y^=0.339-0.182x1-0.377x2 +0.007x3+0.126x4	εt=yt-y^	εt^2
1	0.2999	0.3813	0.7994	0.7285	1.7533	0.1942	0.1057	0.01117
2	0.1660	0.2999	0.3813	-1.3836	0.7285	0.2228	-0.0568	0.00323
3	0.4089	0.1660	0.2999	-3.4100	-1.3836	-0.0025	0.4114	0.16925
4	-0.1680	0.4089	0.1660	-0.2154	-3.4100	-0.2292	0.0612	0.00375
5	0.2405	-0.1680	0.4089	-0.4908	-0.2154	0.1848	0.0557	0.00312
6	0.3410	0.2405	-0.1680	-0.7221	-0.4908	0.2917	0.0493	0.00243
7	0.1698	0.3410	0.2405	3.1949	-0.7221	0.1176	0.0522	0.00273
8	0.7620	0.1698	0.3410	-0.6856	3.1949	0.5773	0.1847	0.03411
9	-0.2650	0.7620	0.1698	-0.2270	-0.6856	0.0483	-0.3133	0.09816
10	-0.2690	-0.2650	0.7620	-2.6120	-0.2270	0.0531	-0.3221	0.10375
11	0.0115	-0.2690	-0.2650	-0.3665	-2.6120	0.1562	-0.1447	0.02094
12	0.1256	0.0115	-0.2690	-1.9363	-0.3665	0.3786	-0.253	0.06401
13	0.2132	0.1256	0.0115	-2.2440	-1.9363	0.0521	0.1611	0.02595
14	0.0269	0.2132	0.1256	-4.1005	-2.2440	-0.0586	0.0855	0.00731
15	-0.2191	0.0269	0.2132	-0.2896	-4.1005	-0.2650	0.0459	0.00211
16	0.4099	-0.2191	0.0269	-0.2577	-0.2896	0.3304	0.0795	0.00632
17	0.3670	0.4099	-0.2191	-0.3559	-0.2577	0.3120	0.055	0.00303
18	-0.2059	0.3670	0.4099	-2.3740	-0.3559	0.0562	-0.2621	0.06870
Σ	2.4152	3.0024	3.4348	-17.7476	-13.6203			0.63003

ان صيغة احصاءة F في ظل اختبار السببية لكرانجر هي:

F= [(SSR res. -SSR unres.) /m]/ [SSR unres. /(n-k unres.)]

حيث: .SSR res مجموع مربعات البواقي للنموذج المقيد، .SSR unres مجموع مربعات البواقي للنموذج غير المقيد، m عدد القيود، أي عدد المتغيرات المتباطئة ل xit المُستبعدة من النموذج المقيد، n عدد المشاهدات، k عدد المعلمات المقدرة في النموذج غير المقيد.

F= [(1.3683-0.6300)/2]/ [0.6300/ (18-5)] = 22.39

عند مقارنة قيمة F المحتسبة هذه مع قيمتها الحرجة عند m=2 وn-k=13 عند مستوى معنوية 5% والبالغة 3.81، نلاحظ ان القيمة المحتسبة اعلى من نظيرتها الحرجة، مما يحدو بنا الى رفض فرضية العدم، القائلة بان عوائد الأسهم لا تُسبب نمو الناتج المحلي الإجمالي، ونقبل الفرض البديل، مما يعني ان عوائد الأسهم تسبب نمو الناتج.

الاستنتاجات والتوصيات

اولاً: الاستنتاجات

1- لُوحِظ من النتائج المُتحصِلة بان عوائد الأسهم، كمتغير مُستقل، تُسبب نمو الناتج المحلي الإجمالي، كمتغير تابع، في حالة العراق، على الأقل خلال مدة البحث، طالما ان اختبار احصاءة F، وفقا لاختبار سببية كرانجر اظهر بان قيمته المُحتسبة اعلى من نظيرتها الجدولية(الحرِجة)مما يحدو بنا الى رفض فرضية العدم التي تنص على عدم تسبيب عوائد الأسهم نمو ذلك الناتج، ونقبل الفرضية البديلة، التي تنص العكس. كما ان اتجاه السببية من العوائد الى الناتج جرب الباحث العكس فلم يجد سببية بينهما.

2- تُشير البيانات الى ان الناتج المحلي الإجمالي (y)، والقيمة السوقية لاسهم الشركات المدرجة في سوق العراق للأوراق المالية (x)، أظهرت، طيلة مدة البحث، سلوكا مُتوافقا، الى حد ما، وخصوصا خلال فترات الازمات المذكورة ادناه.

3- أظهرت معدلات نمو الناتج المحلي الاجمالي (Ry) في العراق، خلال مدة البحث، بان مسارها مُتقلب وليس ثابت تماما، بل انها تحوّلت الى الحالة السالبة في بعض السنوات، مثلا في 2009، بسبب الازمة النفطية، وللمدة 2014-2015، بسبب هجمات داعش الإرهابية، وفي2020، بسبب ازمة كرونا، وكذلك في 2023.

4- يتضح من البيانات المعروضة، بان معدل نمو أسعار الأسهم (Rx)، أظهرت توائما، بشكل عام، مع اتجاه نمو الناتج (Ry)، مما يُشير الى وجود انسجام (تسبيب)، الى حد ما، بينهما.

5- ان ارقام معدلات نمو عوائد الأسهم(rx)أظهرت تقلبا اشد وطأة من نظيرتها الخاصة بالناتج بل أضحت بحالة سالبة في معظم سنوات البحث مما يؤكد الخطورة العالية للاستثمار بالأسهم كأداة مالية.

6- أظهرت النتائج المتحققة الخاصة بحالة العراق، عينة البحث، انه يمكن الركون الى القيمة السوقية للأسهم، كإحدى الوسائل، وليست الوسيلة الحصرية، للتنبؤ بالمسار المستقبلي لنمو الناتج المحلي الإجمالي، مما يُرشِد صنّاع السياسة الى بعض التصورات المفيدة عند رسمهم للمسار المستقبلي للسياسات المُتبعة ذات الصلة. فمثلا، اذا حصلت زيادة عامة في أسعار الأسهم، فهذا مؤشر مفيد لهؤلاء الصنّاع على تحسن الناتج مستقبلا، مما يحدو بهم الى اتباع سياسة نقدية تتناغم مع هذا التطور
لدرء خطر التضخم والانكماش معا.

ثانياً: التوصيات

1- طالما ان البحث اثبت وجود علاقة سببية بين معدل نمو عوائد الأسهم ومعدل نمو الناتج ، فانه يجب الاخذ بالاعتبار مسار معدلات نمو العوائد عند رسم السياسات المتبعة، خصوصا السياسة النقدية والمالية.

2- محاولة الحد من التقلبات الحادة في معدلات نمو عوائد الأسهم للتأثير بشكل واضح وسلس وقابل للتنبؤ به في مسار نمو الناتج، الذي يتأثر بالطبع بعوامل أخرى ، يجب أيضا اخذها بالاعتبار.

3- العمل على تهيئة الظروف والشروط التامة لعمل السوق المالية على نحو سلس ودون التعرض لتقلبات شديد وعدم التكاثر بالأحداث الخارجية من حيث تأثير العدوى ، لكي تنعكس هذه الصورة الإيجابية على نمو الناتج .

4- ادراج المزيد من الشركات والقطاعات الناجحة في قوائم السوق (توسيع وعاء السوق) بحيث يتم تداول المزيد من الأدوات المالية وبمبالغ اكبر، وهو ما ينعكس إيجابيا أيضا على نمو الناتج.

المصادر Reference

1- ADAM HAYES, What Are Returns in Investing, and How Are They Measured? Investopedia, March 06, 2023, at https://www.investopedia.com/terms/r/return.asp

2- Bob Sullivan and Benjamin Curry, Average Stock Market Return, Jul 30, 2024, at https://www.forbes.com/advisor/investing/average-stock-market-return/

3- DHUHA ISHAQ KHALEEL AL-TABLEE, Prof. Dr Subhi Hassoon, Financial Intelligence and Performance Industry: An Analysis of Its Impact on the Productivity of Iraqi Private Banks as A Model, International Journal of Accounting and Economics Studies, https://doi.org/10.14419/57m1a057

4- Economic Growth, at https://www.rba.gov.au/education/resources/explainers/economic-growth.html

5-Eugene F. Fama, Stock Returns, Expected Returns, and Real Activity, The Journal of Finance, https://doi.org/10.2307/2328716

6- From Wikipedia, the free encyclopedia, Gross Domestic Product, at https://en.wikipedia.org/wiki/Gross_domestic_product

7- JASON FERNANDO, Gross Domestic Product (GDP) Formula and How to Use It, June 03, 2024, at https://www.investopedia.com/terms/g/gdp.asp

8- John Y. Campbell, Stock returns and the term structure, Journal of Financial Economics, Volume 18, Issue 2, June 1987, Pages 373-399.

9- Kimberly Amadeo, Components of GDP: Explanation, Formula and Chart, on May 16, 2024, at https://www.thebalancemoney.com/components-of-gdp-explanation-formula-and-chart-3306015

10- LESLIE KRAMER, What Is GDP and Why Is It Important to Economists and Investors?, June 03, 2024, at https://www.investopedia.com/ask/answers/what-is-gdp-why-its-important-to-economists-investors

11- Mike Price, Average Stock Market Return, Updated Nov 13, 2023 at https://www.fool.com/investing/how-to-invest/stocks/average-stock-market-return/

12- Peter Chen and Guochang Zhang, How do accounting variables explain stock price movements? Theory and evidence, Journal of Accounting and Economics, Volume 43, Issues 2–3, July 2007, PP. 222-223.

13- RENEE ANN BUTLER, How to Evaluate Stock Performance, on June 16, 2024, at https://www.investopedia.com/articles/investing/011416/how-evaluate-stock-performance.asp, Vol. 12 No. 6 (2025). Vol. 45, No. 4 (Sep., 1990), pp. 1089-1108.

14- TIM CALLEN, GROSS DOMESTIC PRODUCT: AN ECONOMY'S ALL, FINANCE https://www.imf.org/en/Publications/fandd/issues/Series/Back-to-Basics/gross-domestic-product-GDP

15- World Bank, World Development Indicators, https://data.worldbank.org/indicator

16- World Food Programme, Iraq - exchange rates, https://dataviz.vam.wfp.org/the-middle-east-and-northern-africa/iraq/economic/exchange-rates

17- المصرف المركزي العراقي، مديرية الإحصاء والأبحاث، النشرات السنوية، بغداد، سنوات وصفحات مُتفرقة.