حول أساليب تقليص التباين

أ.د.صلاح حمزة عبد
كلية الادارة والاقتصاد
الجامعة المستنصرية

م.د. محمد رمضان عتاب
كلية الادارة والاقتصاد
الجامعة المستنصرية

I- المقدمة وهدف البحث

على الرغم من إن الهدف الأساسي من إجراء المحاكاة يتمثل بملاحظة وتقويم أداء المنظومة التي تسيطر على المسألة قيد الاهتمام ، إلا إن هناك هدفا" آخر لا يقل أهمية عن سابقه الذي ذكرنا ، هذا الهدف يتمثل بتحديد قيم معالم تلك المنظومة التي تجعل من أداؤها أفضل ، أو بالأحرى امثل ما يمكن . ان العنوان البارز الذي تندرج تحته الموضوعات والجوانب المرتبطة بما ورد أعلاه ، يتمثل بأمثليه المحاكاة ، اذ ان هناك العديد من المسائل التي يجب مراعاتها عند محاولة الوصول لمحاكاة مثلى ، هي :

١. ان عملية إيجاد المردود المتوقع لقيم معالم معينة ضمن المنظومة يتطلب إجراء عملية محاكاة كاملة تحتاج إلى وقت طويل نسبيا (في الغالب) بغض النظر عن نوع الحاسوب المستخدم وجودة البرنامج المكتوب.
٢. تزداد دقة المحاكاة بزيادة عدد المكررات المجراة للمسألة قيد الدراسة.
٣. كبر عدد المعالم في عملية المحاكاة من جهة وقلة عدد الاختيارات الواقعية من جهة أخرى يؤدي إلى اختيار عدد قليل محدد مسبقا من التوافيق للمعالم وغالبا ما تختار هذه التوافيق لتمثل الخبرة العملية المتوفرة واستنادا إلى ما متوفر من أدبيات كنظرية المعاينة التي تستند عليها الظاهرة او المسألة قيد التحليل فمثلا شكل جناح الطائرة له اختيارات مبنية على أساس حساب قوى الديناميكا الهوائية وهو متوفر بأشكال معدودة محددة ومعروفة كما وان حجم العينة يمكن ان يختار ليمثل حالات العينات الصغيرة والمتوسطة والكبيرة وهكذا.
٤. في الكثير من تطبيقات المحاكاة فان الهدف يتمثل بإيجاد القيم المثلى للعديد من المعايير تعتبر هذه العملية من الناحية النظرية كتعدد لدالة الهدف التي تدخل ضمن مسائل الامثلية المتعددة.

وبصورة عامة فان عملية إيجاد القيم المثلى في المحاكاة تتأثر من ناحية بدقة المحاكاة من جهة وبزمن المحاكاة من جهة أخرى (أي إيجاد القيم المثلى بزمن معقول)، وبما إن الدقة تتطلب وقتا أطول في عملية المحاكاة لذلك ولأجل مراعاة النقاط السابقة في عملية اختيار القيم المثلى في المحاكاة قام الباحثون بتقديم العديد من الطرائق التي تؤدي إلى زيادة كفاءة عملية إيجاد القيم المثلى في المحاكاة منها:

١. أساليب تقليص التباين التي تؤدي إلى زيادة تقارب نتائج المحاكاة بصورة أسرع أي بزمن اقل وبدقة اكثر.
٢. طرائق التوقف ذلك أن الكثير من طرائق المحاكاة تكون مستمرة التنفيذ لذلك جاءت الحاجة

إلى اختيار الأسلوب الأفضل للتوقف الذي لا يؤثر على دقة النتائج ولا يزيد من زمن المحاكاة بصورة كبيرة.

٣. طرائق اختيار البديل الأحسن بين البدائل المتوفرة بدلا من البحث في مجمل مساحة فضاء المعالم.

٤. طرائق استبدال النماذج المستخدمة في المحاكاة بنماذج مظهرية **Metamodels** مقدرة تكون بشكل دوال غير خطية عادة لا تحتاج إلى إجراء المحاكاة. فمثلا ان عملية حساب قيمة الدالة التجميعية العكسية للتوزيع الطبيعي تحتاج إلى تطبيق اسلوب محاكاة مونت كارلو لإيجاد قيمة واحدة فقط للدالة اما في حالة استبدال هذه الدالة بدالة تقريبية بسيطة فان العملية لا تتعدى عملية حساب قيمة الدالة الجديدة.

من خلال ذلك يتضح لدينا ان عملية إيجاد القيم المثلى في المحاكاة لايمكن تجزئتها عن طرائق زيادة كفاءة هذه العملية كما يتضح الطيف الواسع من المسائل النظرية التي تطرح تحت اسم الامثلية في المحاكاة حيث ان أي من النقاط السابقة يمكن ان تعتبر كمحاولة على طريق الامثلية في المحاكاة ولذلك تم اختيار دراسة جانب واحد في الامثلية في هذا البحث يتمثل بأساليب تقليص التباين عله يصل الى تغطية غالب جوانبه بدلا من الخوض في جميع مسائل الامثلية في المحاكاة دفعة واحدة الأمر الذي يفقد البحث ما مرجو منه .

وبذلك، فأنه يمكن تلخيص **هدف البحث** بما يلي:

(١) تحوير مقترح على أسلوب متغيرات السيطرة .

(٢) مقارنة أداء أساليب تقليص التباين في عملية رسو الاختيار على أنموذج ماركوف باستخدام معيار اكياكي، عند محاكاة انموذج ماركوف كوجهة تجريبية لما نروم الوصول اليه.

II- أدبيات البحث

سندرج أدناه ابرز الادبيات التي تناولت موضوع الدراسة على وفق تسلسلها الزمني ، اذ سيجد القارىء الكريم ان هذه البحوث تتصف بالحداثة نسبيا" اتفاقا" مع حداثة موضوع الدراسة كونه ابرز المواضيع في الساحة العلمية في هذا الجانب ، فقد قارن الباحث **Heegaard [8]** في عام ١٩٩٥ بين مجموعة من اساليب تقليص التباين في المحاكاة حيث سماها بأساليب زيادة سرعة المحاكاة **Speed up techniques** وكانت الأساليب المستخدمة هي أسلوب المحاكاة حسب الأهمية **Importance Sampling** واسلوب البدء من جديد **RESTART** وأسلوب تجزئة الانتقال **Transition splitting** واستبعد طريقة مونت كارلو المباشرة باعتبار ان هذه الأساليب تم أثبات أفضليتها نسبة للطريقة المباشرة وتمت المقارنة عن طريق اجراء محاكاة لتطبيق معين (نموذج صفوف الانتظار **M/M/1/N**) باستخدام الأساليب الثلاثة المذكورة آنفا حيث اعتمد التباين كاساس للمقارنة كما اعتمد وقت التنفيذ كمعيار لقياس الجهد المبذول لاجراء كل اسلوب ، كما وأظهرت النتائج بان أسلوب تجزئة الانتقال هو الافضل ضمن التطبيق المختار يليه أسلوب المعاينة حسب الأهمية ثم أسلوب البدء من جديد .

وفي عام ١٩٩٧ قام الباحثان **Hesterberg [9]** و **Nelson** باستخدام أسلوب متغيرات السيطرة لحساب الاحتمالات والمئينات **Quintiles** للمنظومات ذات الطابع العشوائي **Stochastic** حيث ركز الباحثان اهتمامهما على الاحتمالات والمئينات صعبة الحساب مثل الاحتمالات القريبة من الصفر او القريبة من حدود التوزيع .وقد تم ذلك عن طريق استخدام

طريقة جديدة لحساب الاحتمالات وعمل الباحثان على تسريع هذه الطريقة وزيادة دقتها باستخدام اسلوب متغيرات السيطرة وطبقت النتائج على انموذج صفوف الانتظار وانموذج الخزين.

كما قام الباحثان[13] Keramat و Kielbasa في عام ١٩٩٨ بمناقشة مجموعة من اساليب تقليص التباين المستخدمة في طرائق تقدير المردود Yield estimation وركز الباحثان اهتمامهما على اسلوب المعاينة المجزئة Stratified Sampling وكيفية اجراء عملية التجزئة واقترحا نظرية تقول بوجود مقدر كفوء باستخدام هذه الاسلوب حيث تمت مقارنة النتائج على مثالين تطبيقيين اختص الاول بدالة روسنبرك-فالي الفيزياوية اما التطبيق الآخر فقد اختص بمرشح اتصالات لحزمة اشارات مدى امرار واطئ.

واقترح كل من[4] Douma و Hoog و Van den Hof في عام ١٩٩٨ اسلوبا جديدا لتقليص التباين لتقديرات دالة الانتقال اللامعلمية Non-parametric Transfer function اذ طبقوا ذلك على الانظمة الخطية غير المتأثرة بالزمن Time invariant ذات الطبيعة المتقطعة discrete واستند الاسلوب الجديد الى استخدام الموجات الصغيرة Wavelets بدلا من الاستخدام الشائع للنوافذ الطيفية Spectral windows.

وقام الباحثون[2] Ben Amuer و L'Ecuyer و Lemieux عام ١٩٩٩ بتطبيق بعض اساليب تقليص التباين وطريقة تقديرات مونت كارلو الكاذبة Quasi Monte Carlo في نماذج التطاير العشوائية في الموارد المالية Stochastic Volatility Models in Finance حيث اظهروا بان بعض من هذه الاساليب يمكن ان تؤدي الى تقليص كبير في التباين او زيادة كبيرة في كفاءة التقديرات المدروسة حيث اظهرت الدراسة في بعض الامثلة امكانية الحصول على معامل تقليص يصل الى ١٠٠ مليون مرة بدون زيادة ملحوظة في الجهد المبذول في المحاكاة ودرسوا كذلك نفس النماذج في حالة وجود عدد كبير من المتغيرات واستخدموا لذلك اسلوب متغيرات السيطرة واسلوب المتغيرات المتضادة واسلوب مونت كارلو الشرطي.

استحدث الباحثان[17] Lemienx و L'Ecuyer عام ٢٠٠٠ أسلوبا جديدا ضمن اساليب مونت كارلو الكاذبة Quasi Monte Carlo العاملة ضمن بيئة التكاملات المتعددة باستخدام نقاط منتشرة انتشارا منظما (بيانات غير عشوائية) وليس كما هو الحال في طريقة مونت كارلو التي تأخذ عينة عشوائية مستقلة عن بعضها البعض من البيانات اذ اعتمد الباحثان مبدأ توزيع القواعد الشبكية المقترح من قبل كوروبوف Korobov عام ١٩٥٩ في توزيع المشاهدات توزيعا نظاميا بعدها يتم تعشية هذه البيانات بإضافة قيمة عشوائية صغيرة لكل مشاهدة ، كما درس الباحثان عملية تقليص التباين في هذه الطريقة بعد ان تم اقتراح مقدر كفء لهذا النوع من المحاكاة وطبق الباحثان هذه الطريقة على ثلاث نماذج تجريبية لتوضيح فكرتها ومقارنتها بطريقة مونت كارلو المباشرة.

قام كل من[12] Kamal و Ayyub عام ٢٠٠٠ بتقدير المعولية للنظم المركبة باستخدام المحاكاة المدعمة بأساليب تقليص التباين اذ قام الباحثان بتصنيف أساليب تقليص التباين الى مجاميع استنادا الى الخواص العامة والمشتركة لهذه الأساليب وبذلك تمكن الباحثان من اخذ اسلوب واحد ليمثل كل مجموعة، بعدها استخدمت هذه الأساليب في المحاكاة لتقدير المعولية للانظمة المركبة كما تم حساب معامل الاختلاف لجميع الأساليب . لقد استخدم الباحثان مثالا تطبيقيا لعرض هذه الأساليب والمقارنة بينها كما اعتمدت طرائق تحليل الحساسية في تحديد كفاءة هذه الاساليب حيث أظهرت النتائج بان أساليب تقليص التباين تكون ذات كفاءة عالية في

حساب المعولية للنظم المركبة وتتطلب وقتا معقولا في الحساب.

وقام الباحث[24] Yeh عام ٢٠٠٢ باستخدام طريقة مونت كارلو الهجينة Hybrid Monte Carlo لتقدير معولية أنظمة الشبكات دون الحاجة للرجوع الى نقاط الانقطاعات والممرات الدنيا Minimal pathsets,cutsets وقارن الباحثان نتائج هذه الطريقة بطريقة مونت كارلو المباشرة حيث اظهرت المقارنة كفاءة الطريقة المقترحة.

وعمل كل من[3] Ben-Ameur و L'Ecuyer و Lemieux في عام ٢٠٠٣ على ايجاد طريقة عامة لدمج اسلوب المتغيرات المتضادة واسلوب متغيرات السيطرة عن طريق استخدام مجموعة من المتغيرات العشوائية لكل نقطة واعتبارها ذات توزيع غير مستقل أي انها غير مستقلة فيما بينها حيث اتخذت هذه المجموعة من المتغيرات على انها مجموعة المتغيرات المتضادة ثم تم اختيار مجموعة اخرى من المتغيرات واعتبارها متغيرات السيطرة كما هو الحال في هذا الاسلوب ثم ادمج الاثنان ليكونان أنموذج يحوي مجموعة اكبر من المتغيرات تحل بواسطة طريقة المربعات الصغرى العامة GLS واستنتج الباحثان ان هذه الطريقة تؤدي الى تصغير التباين بصورة كبيرة إلا انها تتطلب وقتا كبيرا للحساب كما تتطلب ذاكرة كبيرة من الحاسوب.

III- محاكاة مونت كارلو المباشرة Direct Monte Carlo Simulation

تسمى أيضا باسم محاكاة مونت كارلو لمتوسط العينة The sample mean Monte Carlo أو محاكاة مونت كارلو الخام Crude Monte Carlo اذ لو كان المطلوب احتساب قيمة التكامل الآتي[7]:

$$\theta = \int_a^b g(x)dx \qquad \text{............(١)}$$

لامكن بعد اعادة كتابة التكامل في (١) اعلاه بالشكل:

$$\theta = \int_a^b \frac{g(x)}{f_x(x)} f_x(x)dx \qquad \text{............(٢)}$$

وذلك لأي دالة كثافة احتمال مثل $f_x(x)$ ضمن الفترة [a,b] حيث سيمثل التكامل أعلاه بشكل توقع رياضي لدالة معينة أي:

$$\theta = E\left[\frac{g(x)}{f_x(x)}\right] \qquad \text{............(٣)}$$

حيث يخضع المتغير x لدالة كثافة الاحتمال $f_x(x)$ المشار اليها آنفا. فلو افترضنا على سبيل التوضيح ان:

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{O.W.} \end{cases} \qquad \text{............(٤)}$$

فأنه على وفق المعادلة (٣) سيكون:

$$\theta = (b-a)E[g(x)] \qquad \text{............(٥)}$$

ان المقدار غير المتحيز لـ θ سيكون عبارة عن متوسط العينة الناجم عن المحاكاة وهو بالشكل:

$$\hat{\theta} = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \qquad \text{............(٦)}$$

ان المقدار الوارد في المعادلة (٦) اعلاه هو ما يسمى بمقدر مونت كارلو المستند على متوسط العينة كما يمكن ان يصنف على انه مقدر طريقة العزوم، وان لهذا المقدر تباين مقداره[23]:

$$\begin{aligned} Var(\hat{\theta}) &= Var\left[(b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right] \\ &= \frac{(b-a)}{n}\left[\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) - \theta^2\right] \end{aligned} \qquad \text{............(٧)}$$

وبما أن المقدرات الناتجة عن المحاكاة تكون غير متحيزة[23] ، فأنه يتم قياس الكفاءة بالاعتماد على تباين المقدرات المطلوب مقارنتها فقط دون اللجوء الى متوسط مربعات الخطأ او التحيز مع الأخذ بنظر الاعتبار الجهد اللازم لحساب كل مقدر ، فمثلا لمقارنة كفاءة المقدرين $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ بحيث ان:

$$E\hat{\theta}_1 = E\hat{\theta}_2 = \theta \qquad \text{............(٨)}$$

فاذا كان مقدار الجهد اللازم لاحتساب $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ هو t_1 , t_2 على التوالي فان مقياس الكفاءة يكون بالصيغة:

$$Eff = \frac{t_1 Var(\hat{\theta}_1)}{t_2 Var(\hat{\theta}_2)} \qquad \text{............(٩)}$$

حيث ان $Var(\hat{\theta}_1)$ و $Var(\hat{\theta}_2)$ عبارة عن تبايني المقدرين $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ على التوالي.

كما ويقاس الجهد اللازم لحساب مقدر معين عادة عن طريق حساب الوقت المستغرق في عملية حساب المقدر. من ناحية اخرى ولاجل ايجاد فترة الثقة للمقدر $\hat{\theta}$ فباستخدام نظرية الغاية المركزية ينتج[23]:

$$P\left[\hat{\theta} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}_o}{\sqrt{n}} < \theta < \hat{\theta} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}_o}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha \qquad \text{.........(١٠)}$$

وفي الواقع فانه يمكن ايضا استخدام نصف عرض فترة الثقة Half Width (HW) Confidence Interval كمقياس للكفاءة وبالتالي كمعيار للمقارنة بين المقدرات حيث انه كلما قلت قيمة نصف عرض فترة الثقة HW كلما كانت كفاءة المقدر اكبر كما يمكن كذلك استخدام هذه العلاقة لتحديد عدد التشغيلات اللازمة للحصول على مقدر ذي نصف عرض فترة ثقة معين اذ سيكون:

$$R = \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{HW} Var(\hat{\theta}) \qquad \text{.........(١١)}$$

ان هذه العملية تنفذ عن طريق اجراء محاكاة اولية لتقدير $Var(\hat{\theta})$ ومن ثم إكمال المكررات لحين الوصول للعدد المطلوب لغرض الحصول على الدقة اللازمة.

IV - أساليب تقليص التباين Variance Reduction Techniques

تعرف اساليب تقليص التباين على انها وسيلة لاستخدام المعلومات المتوفرة حول المشكلة، على انه في حالة عدم توفر أي معلومات حول المشكلة فانه لا يمكن استخدام هذه الأساليب اما اذا توفرت كافة المعلومات (المعرفة الكاملة) حول المشكلة فان التباين يمكن اختزاله الى الصفر مما يعني بانه لا داعي لاستخدام المحاكاة.

تهدف هذه الأساليب الى ايجاد التقدير المطلوب بأقل عدد من التشغيلات Runs وباقل تباين ولكن لسوء الحظ فأن كثيرا من هذه الأساليب لاتعطي الضمان[15] لتقليل التباين او حتى معرفة مدى النقصان الممكن حصوله في التباين مسبقا وان استخدام هذه الأساليب بدون الرجوع الى الاساس النظري للمشكلة المدروسة يؤدي الى عدم نقصان التباين بصورة كبيرة وفي بعض الاحيان يؤدي الى نتائج عكسية اي زيادة التباين او ما يسمى بـ(Backfiring)[15]. وبصورة عامة فانه يمكن القول بان استخدام طرائق تقليص التباين يؤدي الى زيادة كفاءة المقدرات وتقليل طول فترة الثقة لها مما يؤدي الى زيادة دقة المقدرات وقصر الزمن اللازم لحسابها نظرا لقلة التشغيلات المطلوبة لحسابها. إن هناك جملة من الأساليب لاستخدام المعلومات المتوفرة حول المشكلة الا اننا سندرج هنا أهمها حيث ان اغلب الاساليب الاخرى اما ان تكون ذات تطبيقات خاصة او انها عبارة عن حالات خاصة من الاساليب التي سيتم عرضها هنا كما في أدناه :

(a)أسلوب الأرقام العشوائية المشتركة

Common Random Numbers (CRN)[5][15][18][23]

يدعى ايضا بأسلوب المعاينة المترابطة Correlated sampling، أو اسلوب الملفات المتوافقة Matched streams او اسلوب الازواج المتوافقة Matched pairs. يختلف هذه الأسلوب عن باقي أساليب اختزال التباين في انه يستخدم عند المقارنة بين المقدرات باستخدام المحاكاة ولايمكن استخدامه في حالة وجود مقدر واحد فقط، اذ يتلخص هذا الاسلوب باستخدام نفس الارقام العشوائية في المقدرات المراد مقارنتها اي استخدام نفس الارقام العشوائية لنفس الغرض فمثلا لمقارنة الوسط الحسابي مع الوسط الهندسي للتوزيع الاسي فاننا نقوم بتوليد عينة من الارقام العشوائية وفق التوزيع الاسي ونستخدمها في حساب كلا المتوسطين ولا داع لتوليد عينة لكل متوسط ذلك ان توليد عينة لكل متوسط يؤدي الى عدم تطابق الشروط لكلا المتوسطين مما يؤدي الى تقليل تقارب النتائج بالنسبة لبعضهما. ولتوضيح فكرة هذا الاسوب لنفترض ان الهدف من اجراء المحاكاة هو لمقارنة مقدرين مختلفين $t_1(x), t_2(x)$ للمعلمة θ فلاجراء عملية المقارنة نقوم بحساب الفرق بين توقعهما التجريبي المحتسب من خلال المحاكاة وكما يأتي:

$$d = E(t_1(\underline{x})) - E(t_2(\underline{x})) = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{1i}(\underline{x})}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{2i}(\underline{x})}{n} \quad .... \ (١٢)$$

لذلك فان تباين هذا الفرق سيكون:

$$\mathrm{Var}(d) = \mathrm{Var}(t_1(\underline{x})) + \mathrm{Var}(t_2(\underline{x})) - 2\mathrm{Cov}(t_1(\underline{x}), t_2(\underline{x})) \quad \text{............(١٣)}$$

فإذا تم استخدام أرقام عشوائية مختلفة لكل مقدر فهذا يعني استقلال المقدرين وبالتالي فان التباين المشترك لهما سيساوي صفر اما اذ استخدمت نفس الارقام العشوائية في كلا المقدرين فان التباين المشترك يكون عاليا مما يؤدي بالنتيجة الى تقليل تباين **d**. يصح الكلام السابق في حالة توفر صفة الرتابة في كلا المقدرين بنفس الشكل اي انه اذا كان $t_1(.)$ متزايدا يكون $t_2(.)$ متزايدا أيضا وبالعكس، أم اذا كان $t_1(.)$ متزايدا و $t_2(.)$ متناقص فهذا يعني ان يكون التباين المشترك بينهما سالبا مما يؤدي بالنتيجة الى زيادة تباين **d**. ان توليد المتغيرات العشوائية يتم عن طريق تعويض الأرقام العشوائية في دالة لتحويلها الى التوزيع المطلوب لذلك فان هذه الدالة يجب ان تكون رتيبة في حالة تطبيق أسلوب الأرقام العشوائية المشتركة وعلى هذا الأساس تفضل عادة طريقة التحويل المعكوس على غيرها من الطرائق في مثل هذه الحالات بشكل رئيسي.

وللتأكد من نقصان التباين عند تطبيق أسلوب الأرقام العشوائية المشتركة يتم اللجوء الى عمل محاكاة اولية بدون استخدام أسلوب الأرقام العشوائية المشتركة مرة وباستخدامه مرة اخرى لمعرفة نوع وحجم التأثير الناجم عن استخدام هذا الأسلوب ومن ثم إتمام عملية المحاكاة بشكلها النهائي.

ان الهدف الأساسي للمحاكاة في تحليل النظم يتمثل عادة بتحديد تأثير التغيرات الصغيرة على المنظومة قيد الدراسة وذلك عن طريق اجراء تشغيلتين للمحاكاة واحدة بوجود التأثيرات المفترضة والاخرى بعدمها ويتم مقارنة النتيجتين فاذا كانت التشغيلتان مستقلتين كما هو الحال في طريقة مونت كارلو المباشرة فان تباين حاصل الطرح للنتيجتين سيكون عبارة عن حاصل جمع تباينات المقدرين اما اذا كانت التشغيلتان مرتبطتين فان التباين الكلي سيكون اقل من حاصل جمع التباينات بسبب وجود حد التباين المشترك سالب الإشارة، ان هذه هي فكرة اسلوب الأرقام العشوائية المشتركة التي تتلخص بايجاد علاقة قوية بين التشغيلات او بين المقدرات من اجل تقليص التباين. وبصورة عامة اذا كان المطلوب هو ايجاد الفرق بين تقدير المعلمتين θ_1 و θ_2 أي ايجاد:

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 \quad \text{............ (١٤)}$$

حيث ان $\theta_1 = \int g_1(\underline{x}) f_1(\underline{x}) d\underline{x}\ ,\ \underline{x} \in D_1 \subset R^p$ و $\theta_2 = \int g_2(\underline{x}) f_2(\underline{x}) d\underline{x}\ ,\ \underline{x} \in D_2 \subset R^p$

فان خوارزمية اسلوب الارقام العشوائية المشتركة سيتمثل بالخطوات التالية:

١. توليد المشاهدات $\underline{x}_{11}, \underline{x}_{12}, \ldots, \underline{x}_{1n}$ التي تخضع لدالة الاحتمال $f_1(\underline{x})$ والمشاهدات $\underline{x}_{21}, \underline{x}_{22}, \ldots, \underline{x}_{2n}$ التي تخضع لدالة الاحتمال $f_2(\underline{x})$ وذلك من نفس سلسلة الارقام العشوائية $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n$ المستخدمة في توليد $\underline{x}_{11}, \underline{x}_{12}, \ldots, \underline{x}_{1n}$.

٢. تقدير $\Delta\theta$ باستخدام العلاقة:

$$\Delta\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_1(\underline{x}_{1i}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_2(\underline{x}_{2i}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(g_1(\underline{x}_{1i}) - g_2(\underline{x}_{2i})\right) \quad \text{.........(١٥)}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

حيث ان $\Delta_i = g_1(\underline{x}_{1i}) - g_2(\underline{x}_{2i})$. اما تباين $\Delta\hat{\theta}$ فيكون كما أسلفنا عبارة عن:

$$\text{Var}[\Delta\hat{\theta}] = \text{Var}[\hat{\theta}_1] + \text{Var}[\hat{\theta}_2] - 2\text{Cov}[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] \quad \text{.............} \quad (١٦)$$

حيث ان:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_1(\underline{x}_{1i}) \ , \ \hat{\theta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_2(\underline{x}_{2i}) \quad \text{............} \quad (١٧)$$

(b) أسلوب المعاينة حسب الأهمية _Importance Sampling (IS) Technique[5][15][19][20][23]

لتوضيح هذا الأسلوب لنفترض بان المطلوب هو حساب قيمة التكامل الآتي:

$$\theta = \int g(\underline{x})d\underline{x} \qquad \underline{x} \in D \subset R^p \quad \text{............} \quad (١٨)$$

فبافتراض ان $\int g^2(\underline{x})d\underline{x}$ معرف فان التكامل θ سيكون معرف هو الآخر. ان فكرة هذا الأسلوب تتمثل باستخدام توزيع جديد لنقاط العينة على وفق المجال D في المنـاطق الأكثر أهميـة بـدلا من انتشارها بشكل غير ممثل للتوزيع الأصلي وان هذه الفكرة تستند على أسـاس مبدأ جواز تبـديل التوزيع مع الاخذ بنظر الاعتبار التغيرات الناتجة في الدالة الاصلية g(.) وكما يأتي:

$$\theta = E_x[g(\underline{x})] = \int g(\underline{x})d\underline{x} = \int \frac{g(\underline{x})}{h(\underline{x})}h(\underline{x})d\underline{x} = E_{h(x)}\left[\frac{g(\underline{x})}{h(\underline{x})}\right] \quad \text{............} \quad (١٩)$$

حيث ان $\underline{x}$ عبـارة عن متجـه عشوائي يخضع للدالـة الاحتماليـة $h(\underline{x})$ التـي يطلـق عليهـا تسمية توزيـــع المعاينـــة حســـب الاهميـــة Importance Sampling Distribution حيـــث $h(\underline{x}) > 0 \ , \ \forall \underline{x} \in D \subset R^p$ وان المقدار $T(\underline{x}) = \frac{g(\underline{x})}{h(\underline{x})}$ هو مقدر غير متحيز للمعلمـة θ (قيمـة التكامل) ويمتلك تباين يساوي[20]:

$$\text{Var}[T(\underline{x})] = \int \frac{g^2(\underline{x})}{h(\underline{x})}d\underline{x} - \theta^2 \quad \text{............} \quad (٢٠)$$

ولغرض تقدير θ يتم اخذ عينة $\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n$ تخضع للدالـة $h(\underline{x})$ بهدف تعويضـها في الصيغة الآتية لمتوسط العينة:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{g(\underline{x}_i)}{h(\underline{x}_i)} \quad \text{............} \quad (٢١)$$

ولاجل تصـغير تبـاين هذا المقـدار فانـه ينبغي اختيـار $h(\underline{x})$ بشـكل مناسـب وعلـى وفـق النظريـة القائلة بان أصغر تباين يمكن للمقدار $T(\underline{x}) = \frac{g(\underline{x})}{h(\underline{x})}$ ان يصله هو على وفق الصيغة الآتية:

$$\text{Var}[T_{min}(\underline{x})] = \left(\int |g(\underline{x})|d\underline{x}\right)^2 - \theta^2 \quad \text{............} \quad (٢٢)$$

وذلك عندما يخضع $\underline{x}$ لدالة كثافة الاحتمال $h(\underline{x})$ الآتية:

$$h(\underline{x}) = \frac{|g(\underline{x})|}{\int |g(\underline{x})|d\underline{x}} \quad \text{............} \quad (٢٣)$$

ان برهان ما جاءت به النظرية اعلاه يتم بتعويض الصيغة (٢٦) في (٢٣) لتنتج مباشرة المعادلة (٢٢) ولإثبات ان $Var[T_{min}(\underline{x})] \le Var[T(\underline{x})]$ لاي $T(\underline{x})$ آخر فانه باستخدام متراجحة كوشي-شوارز (Cauchy-Schwarz inequality) ينتج:

$$\left(\int |g(\underline{x})| d\underline{x}\right)^2 \le \int \frac{g^2(\underline{x})}{h(\underline{x})} d\underline{x} \quad \text{............} \quad (٢٤)$$

حيث يكون:

$$\left(\int |g(\underline{x})| d\underline{x}\right)^2 = \left(\int \frac{|g(\underline{x})|}{\sqrt{h(\underline{x})}} \sqrt{h(\underline{x})} d\underline{x}\right)^2$$
$$\le \int \frac{g^2(\underline{x})}{h(\underline{x})} d\underline{x} \int h(\underline{x}) d\underline{x} = \int \frac{g^2(\underline{x})}{h(\underline{x})} d\underline{x} \quad \text{............} \quad (٢٥)$$

وكنتيجة لذلك برهن الباحث Rubinstein [23]، بأنه اذا كانت $g(\underline{x}) > 0 \;,\; \forall \underline{x} \in D$ فان افضل دالة كثافة احتمالية تعطي اقل تباين ستكون عبارة عن:

$$h(\underline{x}) = \frac{g(\underline{x})}{\theta} \quad \text{............} \quad (٢٦)$$

وعندها يكون تباين $T(\underline{x})$ يساوي صفر، إلا ان هذا الحل عديم الفائدة من الناحية العملية نظرا لاحتياجه لقيمة θ المجهولة اصلا اضافة الى اننا في المعادلة (٢٦) نحتاج لاحتساب $\int |g(\underline{x})| d\underline{x}$ الذي لايقل تعقيدا عن التكامل الاصلي θ مع ذلك يمكن تحقيق تقليص التباين عند اختيار توزيع يشابه بالشكل الدالة $|g(\underline{x})|$ مع الاخذ بنظر الاعتبار الصعوبات الخاصة بتوليد عينة لمثل هذا التوزيع وكذلك مشكلة اختيار معالم التوزيع التي تعطي افضل النتائج، فمثلا اذا كان التوزيع المختار هو التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فان المشكلة تكمن في تحديد متجه المعالم $\underline{\alpha}' = [\mu, \sigma^2]$ الذي يعطي اقل تباين وكما يلي:

$$\underset{\underline{\alpha}}{Min}\, Var(\hat{\theta}) = \underset{\underline{\alpha}}{Min}\, Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{g(\underline{x}_i)}{h(\underline{x}_i, \underline{\alpha})}\right]$$
$$= \frac{1}{n} \underset{\underline{\alpha}}{Min}\left[\int \frac{g^2(\underline{x})}{h(\underline{x}, \underline{\alpha})} d\underline{x} - \theta^2\right] \quad \text{............} \quad (٢٧)$$

التي تكافئ تصغير المقدار $\underset{\underline{\alpha}}{Min}\left[\int \frac{g^2(\underline{x})}{h(\underline{x}, \underline{\alpha})} d\underline{x}\right]$ مع ذلك فانه من الصعب ايجاد قيم $\underline{\alpha}$ التي تعطي اقل تباين.

لقد اوضح الباحثان Owen [20] و Zhou طريقة اختيار التوزيع الجديد كما يلي ، اذ لو كان المطلوب احتساب قيمة التكامل الآتي:

$$\theta = \int g(\underline{x}) f(\underline{x}) d\underline{x} \qquad \underline{x} \in D \subset R^p \quad \text{............} \quad (٢٨)$$

فان هذا المقدار يمكن ان يكتب بالصيغة الآتية:

$$\theta = \int g(\underline{x}) \frac{f(\underline{x})}{h(\underline{x})} h(\underline{x}) d\underline{x} = E_h\left[g(\underline{x}) \frac{f(\underline{x})}{h(\underline{x})} \right] = E_h\left[g^*(\underline{x}) \right] \quad \text{............} \quad (٢٩)$$

حيث ان $h(\underline{x})$ **دالة كثافة احتمال جديدة وبهذا يكون مقدر هذا الأسلوب بالشكل:**

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g^*(\underline{x}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(\underline{x}_i) \frac{f(\underline{x}_i)}{h(\underline{x}_i)} \quad \text{............} \quad (٣٠)$$

وانه بايجاد الفرق بين تباين هذا الاسلوب وبين طريقة مونت كارلو المباشرة ينتج:

$$\mathrm{Var}[g(\underline{x})] - \mathrm{Var}[g^*(\underline{x})] = \int g^2(\underline{x}) \left(1 - \frac{f(\underline{x})}{h(\underline{x})} \right) f(\underline{x}) d\underline{x} \quad \text{............} \quad (٣١)$$

من خلال ذلك نلاحظ انه للحصول على تقليص في التباين يجب الحصول على المواصفات الآتية للدالة $h(\underline{x})$ **:**

١. $\frac{f(\underline{x})}{h(\underline{x})} > 1$ **عندما يكون حاصل الضرب** $f(\underline{x}).h(\underline{x})$ **صغيرا.**

٢. $\frac{f(\underline{x})}{h(\underline{x})} < 1$ **عندما يكون حاصل الضرب** $f(\underline{x}).h(\underline{x})$ **كبيرا.**

وبذلك يمكن تعريف الجزء المهم (المنطقة المهمة) للدالة (.)h على انها المنطقة A التي تكون فيها قيمة $f(\underline{x}).h(\underline{x})$ **كبيرة وبذلك يتوجب اختيار (.)h بحيث تكون** $f(\underline{x}).h(\underline{x})$ **اصغر ما يمكن عندما** $\underline{x} \in A$ **بمعنى آخر يجب اختيار الدالة (.)h التي تعطي وزنا اكبر للمنطقة A.**

تبرز أهمية هذا الأسلوب ليس فقط في تقليص التباين الحاصل وإنما في إمكانية تبسيط عملية المحاكاة من خلال اختيار توزيع ابسط من التوزيع الأصلي للبيانات مما يؤدي الى زيادة سرعة البرنامج وسهولة تطبيقه وبالتالي زيادة الدقة.

وفي الواقع فانه يمكن استخدام ما يسمى بالتوزيع المميل (الموجه) Tilted distribution كدالة جديدة للمعاينة حسب الأهمية حيث يعرف التوزيع المميل للدالة (.)f بالشكل الآتي[19]:

$$f_t(\underline{x}) = \frac{e^{\underline{t}'\underline{x}} f(\underline{x})}{M_{\underline{t}}(\underline{x})} \quad \text{............} \quad (٣٢)$$

حيث $M_{\underline{t}}(\underline{x})$ **هي الدالة المولدة لعزوم X.**

ويلاحظ في هذه الدالة انها تكون كبيرة عندما $\underline{t}>0$ **وتكون صغيرة عندما** $\underline{t}<0$ **بمعنى آخر فاننا يمكن ان نستخدم قيم t للتحكم بهذه الدالة لحين الحصول على اقل تباين ممكن.**

ان هذا الأسلوب يستخدم في الكثير من التطبيقات وخاصة عملية حساب الاحتمالات المعقدة.

(c) أسلوب المعاينة المجزئة Stratified Sampling (SS) Technique

تتلخص فكرة هذا الأسلوب بتجزئة المنطقة D الى m من المناطق الجزئية المنفصلة $D_i,\ i = 1,2,...,m$ **بحيث يكون** $D = \bigcup_{i=1}^{m} D_i\ ,\ D_i \cap D_j = \phi\ \ \forall i \neq j$ **وبذلك يصبح التكامل قيد النظر لكل منطقة مثل** D_i **على وفق الصيغة[5][7][15][23]:**

$$\theta_i = \int_{D_i} g(\underline{x}) f_x(\underline{x}) d\underline{x} \quad , i = 1,2,\dots,m \quad \text{............} \quad (٣٣)$$

حيث يمكن تقدير التكامل أعلاه لكل منطقة على حدة على وفق طريقة مونت كارلو المباشرة وذلك بأخذ عينات اكبر في المناطق ذات الأهمية الأكبر (الاحتمالية الأكثر)، ويتم ذلك دون تغيير دالة التوزيع وهذا هو الفرق مع أسلوب المعاينة حسب الأهمية، ومما ورد أعلاه يتم احتساب القيمة الكلية لـ θ بالشكل:

$$\theta = \int_{D} g(\underline{x}) f_x(\underline{x}) d\underline{x} = \sum_{i=1}^{m} \int_{D_i} g(\underline{x}) f_x(\underline{x}) d\underline{x} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \quad \text{............} \quad (٣٤)$$

حيث ان: $\sum_{i=1}^{m} P(D_i) = 1$ ، وان $P(D_i) = \int_{D_i} f_x(\underline{x}) d\underline{x}$.

وبافتراض الدالة الجديدة $g_i(\underline{x}) = \begin{cases} g(\underline{x}) & \underline{x} \in D \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ فانه يمكن كتابة التكامل قيد الاهتمام للمنطقة D_i على وفق الآتي:

$$\theta_i = \int_{D_i} P_i g(\underline{x}) \frac{f_x(\underline{x})}{P_i} d\underline{x} = P_i \int_{D_i} g_i(\underline{x}) \frac{f_x(\underline{x})}{P_i} d\underline{x} = P_i E[g_i(\underline{x})] \quad \text{............} \quad (٣٥)$$

حيث ان: $\int_{D_i} \frac{f_x(\underline{x})}{P_i} d\underline{x} = 1 \; , P_i = P(D_i)$. وبذلك يمكن تقدير θ_i على وفق ما يلي:

$$\text{..........} \hat{\theta}_i = \frac{P_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} g(\underline{x}_{ij}) \quad , i = 1,2,\dots,m, \; j = 1,2,\dots n_i \quad , \sum_{i=1}^{m} n_i = n \qquad (٣٦)$$

فيصبح المقدر النهائي للتكامل على النحو الآتي:

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{m} \hat{\theta}_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} g(\underline{x}_{ij}) \quad \text{............} \quad (٣٧)$$

حيث يسلك x_{ij} على وفق الدالة الجديدة $\frac{f_x(\underline{x})}{P_i}$ ضمن المجال D_i .

ان تباين هذا المقدر سيكون:

$$Var(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i^2}{n_i} Var[g(\underline{x}_i)] = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i^2 \sigma_i^2}{n_i} \quad \text{............} \quad (٣٨)$$

حيث ان:

$$\sigma_i^2 = Var[g(\underline{x}_i)] = \frac{1}{P_i} \int_{D_i} g^2(\underline{x}) f_x(\underline{x}) d\underline{x} - \frac{\theta_i^2}{P_i^2} \quad \text{............} \quad (٣٩)$$

ولاجل تصغير تباين هذا المقدر فان ذلك يتم بناء على النظرية القائلة[41] بانه، لتجزئة معينة $D = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ فان اصغر تباين يمكن ان يصله المقدر $\hat{\theta}$ يساوي:

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_i^2}{n_i}\sigma_i^2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{m} P_i\sigma_i\right]^2 \quad .... \ (٤٠)$$

وذلك على اساس كون $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$ بحيث ان:

$$n_i = n\frac{P_i\sigma_i}{\sum_{i=1}^{m} P_i\sigma_i} \quad .... \ (٤١)$$

ان ما ورد ذكره اعلاه يعني بان حجم العينة يجب ان يكون متناسبا مع المقدار $P_i\sigma_i$ وبما ان σ_i مجهولة لذلك يتوجب تقديرها من خلال اجراء محاكاة اولية **Pilot Simulation** اما P_i فعادة ما يمكن تقديرها نظريا وإلا توجب تقديرها ايضا باستخدام المحاكاة الاولية. وتأسيسا على ما ورد اعلاه يمكن البرهنة على ان تباين مقدر اسلوب المعاينة المجزئة **Stratified Sampling** اقل من او يساوي تباين طريقة مونت كارلو المباشرة اي ان $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{\mathrm{stratified}}) \le \mathrm{Var}(\hat{\theta}_{\mathrm{Crude}})$. اذ انه بتعويض $n_i = nP_i$ في المعادلة (٣٨) سنحصل على:

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} P_i \mathrm{Var}[g(\underline{x}_i)] \quad .... \ (٤٢)$$

وباستخدام متراجحة كوشي شوارز **Cauchy-Schwarz** سيكون:

$$\theta^2 = \left[\sum_{i=1}^{m}\theta_i\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i}{\sqrt{P_i}}\sqrt{P_i}\right]^2 \le \sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i^2}{P_i}P_i\sum_{i=1}^{m}P_i = \sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i^2}{P_i} \quad .... \ (٤٣)$$

ومن خلال ضرب طرفي المعادلة (٣٨) بـ P_i واخذ المجموع سينتج:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i \mathrm{Var}[g(\underline{x}_i)] = \int_D g^2(\underline{x}) f_x(\underline{x}) d\underline{x} - \sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i^2}{P_i} \quad .... \ (٤٤)$$
$$\le \int_D g^2(\underline{x}) f_x(\underline{x}) d\underline{x} - \theta^2 = n\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{\mathrm{Crude}})$$

حيث ان $\theta^2 \le \sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i^2}{P_i}$ وبذلك نكون قد اتممنا البرهان.

وفي الواقع فانه يمكن لنا ان نلاحظ ان النظرية اعلاه تنص على ان استخدام اسلوب المعاينة المجزئة يؤدي الى تقليل التباين حتما إلا ان ذلك لايتم في الواقع العملي إلا بوجود الشرط $n_i = nP_i$ الذي لايتوفر بدقة بسبب تقدير P_i او بسبب التقريب الامر الذي يؤدي الى زيادة التباين بدلا من نقصانه في بعض الاحيان.

ان كفاءة أسلوب المعاينة المجزئة نسبة لطريقة مونت كارلو المباشرة يبلغ m^2 تقريبا، وذلك على وفق ما توصل له الباحث **Rubinstein [23]** عام ١٩٩٨.

فاذا كانت المناطق المقسمة متساوية الحجم أي ان $P_i = \frac{1}{m}$, $n_i = \frac{n}{m}$ فان هذا الأسلوب سيدعى باسلوب المعاينة المنتظمة **Systematic Sampling Technique** الذي يمكن تمثيل عمله على وفق الخوارزمية الآتية:

١. تقسيم الفترة [0,1] الى m من من الفترات الجزئية المنفصلة المتساوية.
٢. توليد $u_{ij}\ ,\ i=1,2,...,m\ ,\ j=1,2,...,n_i$ التي تخضع للتوزيع المنتظم على الفترة (0,1).
٣. احتساب $y_{ij}=\frac{(i-1)+u_{ij}}{m}\ ,\ i=1,2,...,m\ ,\ j=1,2,...,n_i$.
٤. استخراج قيم البيانات الجديدة $x_{ij}=F^{-1}(y_{ij})\ ,\ i=1,2,...,m\ ,\ j=1,2,...,n_i$.
٥. تقدير θ بواسطة العلاقة $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n/m}g(\underline{x}_{ij})$ حيث يكون تباين المقدر المذكور عبارة عن $Var(\hat{\theta})=\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_j-\hat{\theta}\right)^2$ وان $\hat{\theta}_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}g(\underline{x}_{ij})$.

(d) أسلوب المتغيرات المتضادة Antithetic Variates (AV) Technique

وهو أسلوب اقترح لاول مرة من قبل Hammarsley و Handscomb [7] عام 1967 وتتلخص بدمج مقدرين غير متحيزين للتكامل الاصلي مع وجود ارتباط قوي سالب بينهما مما يؤدي الى التقليل من التباين الكلي، فاذا كان المقداران $\hat{\theta}_1 , \hat{\theta}_2$ هما مقدارين غير متحيزين للتكامل θ وبينهما ارتباط سالب عال فان المقدر الجديد $\hat{\theta}=\frac{1}{2}(\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2)$ سوف يكون له تباين اقل من طريقة مونت كارلو المباشرة حيث ان:

$$\begin{aligned}Var(\hat{\theta})&=\frac{1}{4}Var(\hat{\theta}_1)+\frac{1}{4}Var(\hat{\theta}_2)+\frac{1}{2}Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)\\&\le\frac{1}{4}Var(\hat{\theta}_1)+\frac{1}{4}Var(\hat{\theta}_2)\end{aligned} \quad .... (٤٥)$$

وان $\frac{1}{2}Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)<0$.

وفي الواقع العملي فانه يمكن الحصول على عدد لانهائي من المقدرات غير المتحيزة للتكامل قيد الاهتمام فمثلا اذا كان لدينا المتغير العشوائي u_i فان $1-u_i$ هو متغير عشوائي آخر (المتغير المضاد Antithetic Variate) يرتبط ارتباطا سالبا تاما مع المتغير u_i فيصبح المقدر النهائي لـ θ بالشكل:

$$\hat{\theta}_{Antithetic}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left[g(u_i)+g(1-u_i)\right] \quad .... (٤٦)$$

من ناحية اخرى وبما ان الجهد اللازم لحساب هذا المقدر هو ضعف المطلوب في حساب مقدر مونت كارلو المباشر لذلك يكون هذا المقدر اكثر كفاءة من مقدر مونت كارلو المباشر في حالة كون $Var(\hat{\theta}_{Antithetic})<\frac{1}{2}Var(\hat{\theta}_{Crude})$.

أن برهان ذلك يمكن ان يتم على أساس افتراض ان g(u) عبارة عن دالة مستمرة غير

متزايـدة برتابـة Monotonically non increasing أو غيـر متناقصـة برتابـة Monotonically non decreasing ولهـا مشـتقة أولـى مسـتمرة فـان $Var(\hat{\theta}_{Antithetic}) < \frac{1}{2} Var(\hat{\theta}_{Crude})$ **.**

ولغرض برهنة ان اسلوب المتغيرات المتضادة هو اكثر كفاءة من طريقة مونت كارلو المباشرة لنفترض ان n=1 وهو افتراض لا يفقد العمومية، عندها يمكن كتابة المعادلة (٤٥) كما يأتي:

$$\begin{aligned} Var(\hat{\theta}_{Antithetic}) &= \frac{1}{4}\int_0^1 g^2(u)du + \frac{1}{4}\int_0^1 g^2(1-u)du + \frac{1}{2}\int_0^1 g(u)g(1-u)du - \theta^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 g^2(u)du + \frac{1}{2}\int_0^1 g(u)g(1-u)du - \theta^2 \end{aligned} \quad \text{... (٤٧)}$$

ويكون: $2Var(\hat{\theta}_{Antithetic}) - Var(\hat{\theta}_{Crude}) = \int_0^1 g(u)g(1-u)du - \theta^2$ **لذلك يكتمل البرهان اذا كان** $\int_0^1 g(u)g(1-u)du \le \theta^2$ **فـاذا كانـت g(u) دالـة غيـر متناقصـة او غيـر متزايـدة مـع مشـتقة اولـى مستمرة وان** $g(1) > g(0)$ **وبافتراض وجود الدالة المساعدة Auxiliary function**

$$\phi(u) = \int_0^u g(1-t)dt - u\theta \quad \text{............ (٤٨)}$$

بحيث تكون $\phi(0) = \phi(1) = 0$ **والمشتقة الاولى لها هي** $\phi'(u) = g(1-u) - \theta$ **وهي رتيبة ايضا وان** $\phi'(1) > 0, \phi'(0) > 0$ **فان** $\phi'(u) > 0\ , \forall u \in [0,1]$ **و ان ،**

$$\int_0^1 \phi(u)g'(u)du \ge 0 \quad \text{............ (٤٩)}$$

وبتكامل هذه المتباينة بطريقة التجزئة سنحصل على:

$$\int_0^1 \phi'(u)g(u)du \le 0 \quad \text{............ (٥٠)}$$

وبتعويض المعادلة $\phi'(u) = g(1-u) - \theta$ **في (٥٣) نحصل على العلاقة** $\int_0^1 g(u)g(1-u)du \le \theta^2$

وبذلك يتم البرهان.

وبشكل عام لنفترض ان:

$$\theta = \int_D g(\underline{x}) f_x(\underline{x}) d\underline{x} \quad \text{............ (٥١)}$$

فان

$$\hat{\theta}_{Antithetic} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left[g(\underline{x}_i) + g(\underline{x}_i^*)\right] \quad \text{............ (٥٢)}$$

حيث ان $\underline{x}_i = F^{-1}(u_i)$, $\underline{x}_i^* = F^{-1}(1-u_i)$ وان $F(\underline{x})$ هي دالة التوزيع التراكمية **(CDF)** لـ $\underline{x}$ وبذلك يكون $\underline{x}_i$, $\underline{x}_i^*$ مرتبطان ارتباطا عكسيا ويكون المقدر النهائي بهذا الأسلوب ذو تباين اقل من تباين طريقة مونت كارلو المباشرة.

فاذا كانت المنطقة $D = \{x : x \in [0,1]\}$ فان تقدير التكامل بأسلوب المعاينة المجزئة سيكون[7]:

$$\hat{\theta}_{\text{Stratified}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\alpha_i - \alpha_{i-1})}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} g\left[\alpha_{i-1} + (\alpha_i - \alpha_{i-1})u_{ij}\right] \quad \text{............} \quad (٥٣)$$

حيث ان $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m = 1$, $P_i = (\alpha_i - \alpha_{i-1})$, $u_{ij} \sim U(0,1)$ ، فاذا كانت $m = 2$, $n_i = n$, $\alpha_1 = \alpha$ سيصبح المقدر بالشكل:

$$\hat{\theta}_{\text{Stratified}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha g(\alpha u_{1j}) + (1-\alpha) g(\alpha + (1-\alpha) u_{2j})\right] \quad \text{............} \quad (٥٤)$$

فاذا افترضنا ان $u_{1j} = u_{2j} = u_j , \forall j = 1,2,\ldots,n$ فان:

$$\hat{\theta}_{\text{Stratified}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha g(\alpha u_j) + (1-\alpha) g(\alpha + (1-\alpha) u_j)\right] \quad \text{............} \quad (٥٥)$$

اما اذا افترضنا بأن $u_{1j} = 1 - u_{2j} , \forall j = 1,2,\ldots,n$ فان

$$\hat{\theta}_{\text{Stratified}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha g(\alpha u_j) + (1-\alpha) g(1 - (1-\alpha) u_j)\right] \quad \text{............} \quad (٥٦)$$

وهذان المقدران (٥٥) و (٥٦) هما بأسلوب المتغيرات المتضادة **Antithetic** فاذا كانت $\alpha = \frac{1}{2}$ فانه يمكن اختزال المقدر في المعادلة (٥٦) الى المعادلة (٤٦) .

وبشكل عام اذا قسم المجال الى جزئين هما $-\infty < \underline{x} < \infty$, $-\infty < \underline{x}^* < \infty$ فان المقدر في (٥٦) يمكن ان يكتب بالشكل الآتي:

$$\hat{\theta}_{\text{Antithetic}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha g(\underline{x}_i) + (1-\alpha) g(\underline{x}_i^*)\right] \quad \text{............} \quad (٥٧)$$

حيث ان $\underline{x}_i = F^{-1}(\alpha u_i)$, $\underline{x}_i^* = F^{-1}(\alpha + (1-\alpha) u_i)$.

فأذا كانت $\alpha = \frac{1}{2}$ يصبح المقدر كما في المعادلة (٥٢) لذلك فانه اذا اريد الحصول على مقدر جيد يجب ايجاد قيمة α التي تقلل التباين إلا انه ولسوء الحظ هنالك صعوبة كبيرة في ايجادها بصورة عامة لذلك تقدر عادة بطرائق عددية من خلال محاكاة اولية الامر الذي يؤدي الى زيادة الجهد اللازم للتقدير وبالتالي تقليل كفاءة المقدر على وفق هذه الطريقة بشكل عام.

(e) أسلوب متغيرات السيطرة Control Variates (CV) Technique

يعتمد أسلوب متغيرات السيطرة في تقدير التكامل على الدمج بين المقدر الاعتيادي لمونت كارلو وقيمة نظرية معروفة تحسب مسبقا ولها ارتباط وثيق مع التكامل المطلوب تقديره[7] . ولهذا الأسلوب تطبيقات عديدة وواسعة بالمقارنة مع باقي أساليب تقليص التباين

حيث تطبق عادة في مسائل صفوف وشبكات الانتظار والكثير من التطبيقات الأخرى.

يتلخص هذه الأسلوب في استخدام متغير عشوائي (مقدر) $\hat{\theta}_z$ كمتغير سيطرة (متغير تصحيح) Control Variate للمتغير العشوائي الأصلي (المقدر الأصلي) $\hat{\theta}$ بشرط ان يكون توقع متغير السيطرة معلوم وهو μ_z حيث يستخدم متغير السيطرة لبناء متغير جديد (مقدر جديد) $\hat{\theta}^*$ له تباين اقل من تباين المتغير الأصلي $\hat{\theta}$ كما يكون مقدرا غير متحيزا للمعلمة θ وهي قيمة التكامل المجهول وتكون صيغة هذا المتغير كما يأتي:

$$\hat{\theta}^* = \hat{\theta} - c(\hat{\theta}_z - \mu_z) \quad .... \quad (٥٨)$$

حيث ان c قيمة ثابتة ، فيكون التباين بالصيغة التالية :

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}^*) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + c^2\mathrm{Var}(\hat{\theta}_z) - 2c\mathrm{Cov}(\hat{\theta}, \hat{\theta}_z) \quad .... \quad (٥٩)$$

فاذا كانت:

$$2c\mathrm{Cov}(\hat{\theta}, \hat{\theta}_z) > c^2\mathrm{Var}(\hat{\theta}_z) \quad .... \quad (٦٠)$$

يكون تباين $\hat{\theta}^*$ اقل من تباين $\hat{\theta}$ أي ان هنالك تقليص في التباين.

ولأجل إيجاد قيمة c التي تعطي اقل تباين لـ $\hat{\theta}^*$ ناخذ المشتقة الاولى للتباين معادلة (٥٩) ونساويها للصفر حيث ينتج:

$$c = \frac{\mathrm{Cov}(\hat{\theta}, \hat{\theta}_z)}{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_z)} \quad .... \quad (٦١)$$

بمعنى آخر فان اقل تباين ممكن لهذا الأسلوب هو:

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}^*) = (1 - \rho^2_{\hat{\theta},\hat{\theta}_z})\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \quad .... \quad (٦٢)$$

لذا فان زيادة الارتباط بين متغير السيطرة $\hat{\theta}_z$ والمتغير الأصلي $\hat{\theta}$ ينتج زيادة في تقليص التباين، ويمكن كذلك استخدام متغير سيطرة مجهول الوسط ولكن بشرط ان يكون وسطه مساويا لوسط المتغير الاصلي أي $\mu_{\hat{\theta}} = \theta$ وعندها يكون المتغير الجديد بالصيغة:

$$\hat{\theta}^* = c\hat{\theta} + (1-c)\hat{\theta}_z \quad .... \quad (٦٣)$$

وهو مقدر غير متحيز للوسط θ وله تباين اقل من تباين المتغير $\hat{\theta}$، وبنفس الأسلوب فان زيادة الارتباط بين $\hat{\theta}_z$ و $\hat{\theta}$ يؤدي الى تقليل التباين اكثر للمتغير[15].

يمكن تعميم أسلوب متغيرات السيطرة الى الحالة التي يوجد فيها اكثر من متغير سيطرة أي حالة تعدد متغيرات السيطرة وذلك على فرض ان المتجه $\underline{\hat{\theta}}_z = \left(\hat{\theta}_{z1}\ \hat{\theta}_{z2}\ ....\ \hat{\theta}_{zq}\right)'$ يحوي q من متغيرات السيطرة معلومة الوسط أي ان $\underline{\mu}_z = \left(\mu_{z1}\ \mu_{z2}\ ....\ \mu_{zq}\right)'$ حيث ان $E\hat{\theta}_{zi} = \mu_{zi}\ ,\ \forall i = 1,2,...,q$. افرض ان $\underline{c}$ هو متجه افتراضي من الثوابت $\underline{c} = \left(c_1\ \ c_2\ \ ...\ \ c_q\right)'$، عندها يكون المتغير الجديد بالشكل الآتي [23] :

$$\hat{\theta}^* = \hat{\theta} - \underline{c}'(\underline{\hat{\theta}}_z - \underline{\mu}_z) \quad .... \quad (٦٤)$$

وهو مقدر غير متحيز للمعلمة θ وله تباين اقل من تباين $\hat{\theta}$ وان قيم $\underline{c}$ التي تعطي اقل تباين هي[23]:

$$\underline{c} = \underline{\sigma}_{\hat{\theta},\hat{\underline{\theta}}_z} \Sigma^{-1}_{\hat{\underline{\theta}}_z} \quad .... \ (٦٥)$$

حيث ان $\Sigma_{\hat{\underline{\theta}}_z}$ هي مصفوفة التباين والتباين المشترك لـ $\hat{\underline{\theta}}_z$ وان $\underline{\sigma}_{\hat{\theta},\hat{\underline{\theta}}_z}$ هو متجه التباين المشترك بين $\hat{\theta}$ و $\hat{\underline{\theta}}_z$ وله بعد **qx1** .

وعند التعويض بقيم $\underline{c}$ ينتج اقل تباين ويساوي :

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}^*) = (1 - R^2_{\hat{\theta},\hat{\underline{\theta}}_z})\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \quad .... \ (٦٦)$$

حيث ان $R^2_{\hat{\theta},\hat{\underline{\theta}}_z} = \dfrac{\underline{\sigma}'_{\hat{\theta},\hat{\underline{\theta}}_z} \Sigma^{-1}_{\hat{\underline{\theta}}_z} \underline{\sigma}_{\hat{\theta},\hat{\underline{\theta}}_z}}{\mathrm{Var}(\hat{\theta})}$ ، وهو معامل التحديد لانحدار $\hat{\theta}$ مع المتغيرات التوضيحية $\hat{\underline{\theta}}_z$ او انه مربع معامل الارتباط المتعدد بينهما حيث انه كلما زاد الارتباط المتعدد هذا كلما قل تباين المتغير الجديد $\hat{\theta}^*$.

اما الحالة الثانية لمتغيرات السيطرة التي تكون فيها الاوساط غير معلومة ومساوية لـ θ كلها فان صيغة المقدر الجديد تكون[7]:

$$\hat{\theta}^* = c_0\hat{\theta} + \sum_{i=1}^{q} c_i \hat{\theta}_{zi} \quad , \qquad c_0 + \sum_{i=1}^{q} c_i = 1 \quad .... \ (٦٧)$$

تكمن أهمية التطبيق العملي لهذا الأسلوب في اختيار متغيرات سيطرة لها ارتباط عالي مع المقدر الأصلي ولها وسط معلوم على انه يجب معرفة مصفوفة التباين والتباين المشترك $\Sigma_{\hat{\underline{\theta}}_z}$ ومتجه التباين المشترك $\underline{\sigma}_{\hat{\theta},\hat{\underline{\theta}}_z}$ اللذان يكونان مجهولان عادة وهما ضروريان لتقدير المتجه الثابت $\underline{c}$ الذي يعطي اقل تباين لذا يستوجب أولا تقديرهما بأساليب سريعة لا تؤثر على سرعة وكفاءة عملية المحاكاة.

(f) تحوير مقترح لأسلوب متغيرات السيطرة

تكمن الصعوبة في أسلوب متغيرات السيطرة السابق في كيفية اختيار متغيرات السيطرة الملائمة للظاهرة المدروسة حيث يصعب في اغلب الأحيان إيجاد مثل هذه المتغيرات كما يصعب معرفة مدى صلاحية هذه المتغيرات من حيث ارتباطها العالي مع المقدر الأصلي ومن حيث إمكانية معرفة التوقع الحقيقي لها الذي هو من احد شروط أسلوب متغيرات السيطرة وكان الإجراء المتبع في الأسلوب السابق هو دراسة الأساس النظري للمسألة المدروسة ومحاولة إيجاد متغيرات سيطرة لها عن طريق اشتقاق متغيرات ابسط من المقدر الأصلي بحيث يكون توقع المتغير (المقدر) الجديد معلوما ويتضح من خلال ذلك صعوبة هذا الأسلوب بل وعدم جدواه في بعض الأحيان نظرا لعدم إمكانية الحصول على متغيرات سيطرة بالشروط المطلوبة او ان تكون متغيرات السيطرة الناتجة قليلة الارتباط بالمقدر الأصلي.

بناء على ذلك، يمكن تحوير الاسلوب السابق من خلال استخدام عزوم الأرقام العشوائية المولدة المستخدمة لتوليد مشاهدات الظاهرة المدروسة على اعتبار ان هذه المشاهدات هي عبارة عن دوال غير خطية (في الغالب) للارقام العشوائية المولدة لها لذلك يمكن استخدام حدود مفكوك

سلسلة ماكلورين كمتغيرات سيطرة متمثلة بالارقام العشوائية مرفوعة الى قوى متزايدة ومضروبة بثوابت يمكن أن تهمل باعتبار انها ستقدر لاحقا هي والاختلافات غير المعروفة والجزء المبتور من سلسلة ماكلورين في عملية تنفيذ أسلوب متغيرات السيطرة المقترح.

ولاجل توضيح الفكرة لنفترض بان المطلوب هو ايجاد تقدير المعولية للتوزيع الاسي بالمعلمة λ من خلال المحاكاة.

$$\theta = R(t) = P(x > t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = e^{-t/\lambda} \quad .... \quad (٦٨)$$

فبما ان تقدير الامكان الأعظم لدالة المعولية للتوزيع الاسي هي:

$$\hat{\theta} = \hat{R}(t) = e^{-t/\bar{x}} \quad .... \quad (٦٩)$$

فان اولى خطوات المحاكاة ستتمثل بتوليد عينة من المشاهدات التي تتبع التوزيع الاسي بمعلمة مفترضة λ بطريقة التحويل المعكوس وكما يأتي:

$$x_i = -\lambda . \log(1 - u_i) \quad , \ i = 1,2,3,...., n \quad .... \quad (٧٠)$$

حيث ان u_i هي الارقام العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم القياسي وان x_i هي المشاهدات التي تتبع التوزيع الاسي بالمعلمة λ.

وبتعويض متوسط المشاهدات في المعادلة (٧٠) وفي المعادلة (٦٩) ينتج:

$$\hat{\theta} = \hat{R}(t) = e^{-\frac{nt}{\sum_{i=1}^{n} \lambda . \log(1 - u_i)}} \quad .... \quad (٧١)$$

يلاحظ بان المقدر المطلوب هو عبارة عن دالة غير خطية بدلالة u_i وبفتح الدالة الناتجة بسلسة ماكلورين نحصل على دالة المعولية كدالة بدلالة العزوم اللامركزية لـ u_i والتي يمكن ان تستخدم كمتغيرات سيطرة حيث تعطي ارتباطا اعلى بزيادة عدد العزوم المستخدمة.

من خلال ذلك يتضح لنا مدى عمومية هذه الطريقة التي تصلح لجميع النماذج الاحصائية مبدئيا والنقطة الاساسية هنا هي في مقدار معامل التحديد الناتج حيث انه كلما ازدادت قيمته كلما ازدادت الدقة الناتجة وقل التباين اكثر.

كما يمكن كذلك استخدام العزوم العاملية Factorial moments او العزوم التراكمية Cumulants بدلا من العزوم اللامركزية للعينة . هذا ومن الجدير بالذكر بان القيم المتوقعة للعزوم اللامركزية للعينة m_p ذات الصيغة :

$$m_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}{n} \quad .... \quad (٧٢)$$

تكون معلومة وتساوي :

$$E(m_p) = M_p = E(u^p) = \int_0^1 u^p du = \frac{1}{p+1} \quad .... \quad (٧٣)$$

حيث ان M_p عبارة عن العزوم اللامركزية للمجتمع .

V – الجانب التجريبي

تمثل الجانب التجريبي في هذا البحث بمقارنة اساليب تقليص التباين من خلال عملية رسو الاختيار على انموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى (انموذج ماركوف) AR(1) باستخدام معيار اكياكي شائع الاستخدام ، فإذا تم توليد بيانات تخضع لانموذج ماركوف فيكون الاستنتاج بان معيار اكياكي يكون دقيقا" ، في حالة تقريره بان النموذج الكامن للبيانات هو AR(1) والا فان النتيجة الناجمة عن هذا المعيار ستكون خاطئة في حالة تقريره بان الانموذج الكامن في المشاهدات هو انموذج آخر غير ماتم توليد البيانات على وفقه كأنموذج AR(2) أو انموذج AR(3) ولقياس دقة هذا المعيار يتم تكرار العملية لعدد من التشغيلات حيث تحسب نسبة القرار الصحيح والقرار الخاطئ والتي تتمثل كدوال بدلالة قوة الاختبار ودالة الخواص Operating characteristic function (OC) وذلك في حالة اعتبار هذا المعيار كأحصاءة لأختبار الفرضية القائلة بخضوع المشاهدات للأنموذج AR(1) ضد الفرضية البديلة وهي ان المشاهدات نتجت عن أنموذج يختلف عن AR(1).

جرى اختيار هذا التطبيق لدراسة الحالات التي يكون فيها تسلسل المشاهدات مهما بمعنى انه يوجد ارتباط ذاتي بين المشاهدات المتعاقبة اي معاملة البيانات كسلسلة زمنية بدلا من البيانات المقطعية ومن جهة اخرى يمكننا هذا التطبيق من دراسة إمكانية استخدام أساليب تقليص التباين في تحسين أداء معيار اكياكي باعتبارها كوسيلة لتجاوز الخطأ الناتج عن عدم إمكانية وجود بيانات لها توزيع مضبوط Exact وخاصة في العينات الصغيرة وبمعنى آخر استخدام الإمكانية التي توفرها بعض من هذه الأساليب في تجاوز عدم الدقة الناتج عن تأثير صغر حجم العينة.

تعرف نماذج السلاسل الزمنية AR(1) و AR(2) و AR(3) بالمعادلات الآتية وعلى التوالي:

$$x_t = \phi . x_{t-1} + a_t \qquad ----(74)$$

$$x_t = \phi_1 . x_{t-1} + \phi_2 . x_{t-2} + a_t \qquad .... (٧٥)$$

$$x_t = \phi_1 . x_{t-1} + \phi_2 . x_{t-2} + \phi_3 . x_{t-3} + a_t \qquad .... (٧٦)$$

حيث ان $\phi's$ هي معالم النماذج وان a_t هو حد الخطأ الذي يتوزع على وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين واحد.

ولاجل تقدير معالم هذه النماذج استخدمت طريقة العزوم للتقدير وكما يأتي[3] ، بالنسبة لأنموذج ماركوف AR(1) كان مقدر ϕ هو:

$$\hat{\phi} = \hat{\rho}_1 \qquad .... (٧٧)$$

اما مقدرات ϕ_1 و ϕ_2 لانموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الثانية AR(2) فهي:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\hat{\rho}_1(1-\hat{\rho}_2)}{(1-\hat{\rho}_1^2)}$$
$$............ (٧٨)$$
$$\hat{\phi}_2 = \frac{(\hat{\rho}_2-\hat{\rho}_1^2)}{(1-\hat{\rho}_1^2)}$$

كما ان مقدرات ϕ_1 و ϕ_2 و ϕ_3 لانموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الثالثة AR(3) عبارة عن:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{(1-\hat{\rho}_1^2)\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_1\hat{\rho}_2(\hat{\rho}_2 - 1) + \hat{\rho}_3(\hat{\rho}_1^2 - \hat{\rho}_2)}{1 - 2\hat{\rho}_1^2(1-\hat{\rho}_2) - \hat{\rho}_2^2}$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{\hat{\rho}_1^2(\hat{\rho}_2 - 1) + \hat{\rho}_2(1-\hat{\rho}_1^2) + \hat{\rho}_3\hat{\rho}_1(\hat{\rho}_2 - 1)}{1 - 2\hat{\rho}_1^2(1-\hat{\rho}_2) - \hat{\rho}_2^2} \qquad .... \ (٧٩)$$

$$\hat{\phi}_3 = \frac{\hat{\rho}_1(\hat{\rho}_1^2 - \hat{\rho}_2) + \hat{\rho}_2\hat{\rho}_1(\hat{\rho}_2 - 1) + \hat{\rho}_{31}(1-\hat{\rho}_1^2)}{1 - 2\hat{\rho}_1^2(1-\hat{\rho}_2) - \hat{\rho}_2^2}$$

حيث ان مقدر الارتباط الذاتي هو عبارة عن:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} \qquad .... \ (٨٠)$$

وان $\hat{\gamma}_k = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})$ **. اما معيار اكياكي فصيغته كما في ادناه[3]:**

$$AIC(k) = Log(\hat{\sigma}_k^2) + \frac{2k}{n} \qquad .... \ (٨١)$$

حيث ان: $\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(x_t - \hat{x}_t)^2$ **. ولاجل اتخاذ القرار بشأن الانموذج الكامن في البيانات يتوجب علينا حساب قيمة هذا المعيار في حالة النماذج الثلاثة الاولى AR(1) و AR(2) و AR(3) حيث يعطي المعيار الافضلية للانموذج الذي يعطي اقل قيمة لمعيار اكياكي.**

V.1 المعالم المفترضة

اختيرت ثلاث نماذج في هذا التطبيق تمثلت باختيار ثلاث حالات من المعالم المفترضة بالإضافة إلى اختيار قيمة تباين الخطأ ثابتة وتساوي واحد ، وكانت المعالم المفترضة كما مبينه في الجدول (١) أدناه ،

جدول رقم (١) : المعالم الافتراضية للتجريب

المعالم / النماذج	ϕ
الأنموذج الأول	٠ ٩
الأنموذج الثاني	١ ٠
الأنموذج الثالث	١ ٠

أما حجوم العينات فكانت صغيرة ومتوسطة وكبيرة وكما في الجدول (٢) ادناه ،

جدول رقم (٢) : حجوم العينات المستخدمة في المحاكاة

حجوم العينات	n_1	n_2	n_3
	١٠	٣٠	١٠٠

اما بالنسبة لعدد التشغيلات فقد تم استخدام ثلاث حالات هي الواردة في الجدول (3) ادناه ،

جدول رقم (٣) : عدد التشغيلات المستخدمة في المحاكاة

عدد التشغيلات	$Run_1(n_1)$	$Run_2(n_2)$	$Run_3(n_3)$
	٥٠٠٠	٢٠٠٠	١٠٠٠

V.2 عملية المحاكاة

لأجل إجراء المحاكاة لهذا التطبيق يتم في البداية توليد عينة من n من المشاهدات التي تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين واحد لتمثل الاخطاء العشوائية للانموذج قيد الدراسة بعدها يتم توليد السلسلة الزمنية لانموذج AR(1) على وفق المعادلة (٧٤) ، على أن تؤخذ القيمة الأولى على إنها متوسط السلسلة الزمنية وهو هنا يساوي صفر.

بعد ذلك يتم حساب التقديرات للنماذج الثلاثة عن طريق حساب قيم مقدرات المعلمات لكل أنموذج وعلى وفق المعادلات (٧٧) و(٧٨) و(٧٩) وذلك بعد حساب تقديرات الارتباطات الذاتية من خلال المعادلة (٨٠) وحينها يمكن حساب قيمة معيار اكياكي كما في المعادلة (٨١) لكل أنموذج وذلك بعد حساب الأنموذج المقدر وعندها يمكن التقرير بان البيانات متأتية من أنموذج AR(1) أو انموذج AR(2) أو انموذج AR(3) عن طريق تحديد الانموذج المناظر لاقل قيمة لهذا المعيار.

ولاجل مقارنة اساليب تقليص التباين في هذا التطبيق يجب ان يكون هنالك مؤشر ما لقياس اداء معيار اكياكي باعتماد هذه الاساليب والمقارنة بين اساليب تقليص التباين في هذا المعيار حيث استخدمت هنا عدة معايير هي:

1. **نسبة القرار الصحيح، اي عدد التكرارات التي يتم فيها بناء على معيار اكياكي اختيار انموذج ماركوف ليمثل البيانات**
2. **تحيز معيار اكياكي.**
3. **متوسط مربعات الخطأ لمعيار اكياكي.**

V.3 وصف أساليب تقليص التباين

تكمن الصعوبة في تطبيق اساليب اختزال التباين في هذا التطبيق في وجود الارتباط الذاتي ضمن المشاهدات واعتبار هذه المشاهدات كسلسلة زمنية لايمكن اعادة ترتيب بياناتها كما ان اي تغيير في هيكلية البيانات او في قيمها يجب ان يكون مدروسا بحيث لايؤثر على الأنموذج الاصلي لها ولذلك دعت الحاجة هنا لذكر كيفية اجراء كل من هذه الاساليب في هذا التطبيق مع ذكر الصعوبات الواردة فيها.

(1) أسلوب المعاينة حسب الأهمية

استخدم لهذا الأسلوب أنموذج معاينة على وفق الأهمية لنسبية للمشاهدات وهو مشابه للأنموذج الاصلي لكن بتغيير طفيف في معالم الأنموذج وكما هو مفصل في الجدول(٤) الآتي:

جدول رقم (٤) : المعالم الافتراضية المستخدمة في اسلوب المعاينة حسب الاهمية

المعالم / النماذج	μ_{IS}	σ^2_{IS}	ϕ_{IS}
الأنموذج الاول	٠	١ ٠	٠ ٩
الأنموذج الثاني	٠	١	١ ٠
الأنموذج الثالث	١	١	١ ٠

(2) أسلوب المتغيرات المتضادة

تم على وفق هذا الأسلوب توليد سلسلتين مرتبطتين ارتباط متقاطع عكسي شبه تام (عال) عن طريق استخدام الأرقام العشوائية المكملة للأرقام العشوائية المستخدمة لتوليد السلسلة الاولى حيث يتم التقدير وحساب معيار اكياكي لكل سلسلة على حدة ولايمكن الدمج بين السلسلتين لان ذلك سيؤدي الى تغير الأنموذج الأصلي للبيانات وبالتالي الاخلال بمصداقية الأنموذج المقارن.

(3) التحوير المقترح على أسلوب متغيرات السيطرة

استخدم هذا الأسلوب دون الرجوع للأساس النظري للمشكلة مما سهل العملية برمتها وكانت النقطة الأساسية هي في اختيار العزوم المناسبة حيث اختير العزمين اللامركزيين الاولين إضافة الى العزم الذاتي الاول لكل رقم عشوائي لتصبح بالنتيجة ستة متغيرات سيطرة هي $u_1, u_1^2, u_2, u_2^2, (u_{1(t)}u_{1(t-1)}), (u_{2(t)}u_{2(t-1)})^2$ والتي لها المتوسطات المعلومة الآتية $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, 0$ على التوالي.

(4) تم على وفق هذا الأسلوب استخدام ثلاثة أجزاء (ثلاث عينات جزئية) وكانت الحدود العليا لها كما هي موضحة في الجدول (٥) الآتي ، حيث تم تغيير هذه الحدود لحين الحصول على نتائج جيدة حيث لايوجد أسلوب موحد لإيجاد هذه الحدود بشكل يعطي افضل النتائج مما يضعف هذا الأسلوب الى حد بعيد كما انه يتأثر بصغر حجم العينة نظرا لتجزئة هذه العينة مما يعني عينات اصغر فأصغر الأمر الذي يقلل من دقة عملية التقدير.

جدول (٥)

الحدود العليا لتجزئة العينة في أسلوب المعاينة المجزئة للتطبيق الثالث

الحدود العليا	upper1	upper2	upper3	upper4
	-١	٠	١ ٥	∞

V.4 مناقشة النتائج

بعد تنفيذ تجربة المحاكاة المفصلة جوانبها على وفق ما ورد في الفقرات اعلاه انه قد تبين ما يأتي:

١. نلاحظ من الجداول (٦) و (٧) و (٨) بان مؤشر نسبة الاختيار الصحيح لأنموذج ماركوف على وفق معيار اكياكي ليمثل البيانات، يظهر بان التحوير المقترح على أسلوب متغير السيطرة هو افضل من اساليب تقليص التباين توليدا للبيانات على الاخص في حالة حجوم العينات الصغيرة ولمختلف حالات السلسلة الزمنية المستقرة ($\phi = 0.90$) وتلك التي تاتي من مشكلة قيمة حدية ($\phi = 1.00$) وغير المستقرة ($\phi = 1.01$)، على ان التحوير المقترح قد كان هو الافضل ايضا لحجمي السلسلة الزمنية المتوسطة والكبيرة في حالة السلسلة الزمنية غير المستقرة. اما بالنسبة لحالتي السلسلة الزمنية المستقرة وتلك التي تعاني من مشكلة قيمة حدية، فقد كانت الافضلية عند حجمي السلسلة الزمنية المتوسطة والكبيرة لاسلوب المعاينة حسب الاهمية. تلت ذلك تباعا الاساليب الاخرى لتقليص التباين من ناحية الجودة مختلفة من ناحية التدرج في ذلك هنا وهناك، على انه مما تجدر الاشارة اليه، هو جودة التحوير المقترح على اسلوب متغيرات السيطرة حتى بالنسبة للحالات التي لم يكن هو الاجود فيها اذ كان الفرق بالمؤشر قيد الاهتمام قليل جدا عن الأسلوب الأجود.

٢. يتبين من الجداول (٩) و (١٠) و (١١) بان مؤشر تحيز معيار اكياكي قد عكس أفضلية اسلوب المعاينة المجزئة في توليد بيانات السلسلة من بين اساليب تقليص التباين عن حالة حجوم العينات الصغيرة لنوعي السلاسل الزمنية المستقرة وتلك التي تعاني من مشكلة القيمة الحدية بينما كانت تلك الأفضلية هي لاسلوب المعاينة حسب الأهمية في حالتي حجوم العينات المتوسطة والكبيرة لنوعي السلاسل الزمنية المشار إليهما.

اما بالنسبة لنوع السلسلة الزمنية غير المستقرة، فقد كانت أفضلية توليد البيانات هي لأسلوب المعاينة المجزئة في حالة حجوم السلاسل المتوسطة أما في حالة حجمي السلاسل الزمنية الصغيرة والكبيرة فقد ذهبت تلك الأفضلية للتحوير المقترح على أسلوب متغيرات السيطرة.

٣. يتبين من الجداول (١٢) و (١٣) و (١٤) بان مؤشر متوسط مربعات الخطأ لمعيار اكياكي، قد عكس نفس ما عكسه مؤشر تحيز معيار اكياكي بالضبط ولكافة التفاصيل المشار إليها في الفقرة (ب) السابقة، عدا انه في حالة السلسلة الزمنية غير المستقرة وعند حجم السلسلة الكبيرة، شارك اسلوب المتغيرات المتضادة الأفضلية مع التحوير المقترح على أسلوب متغيرات السيطرة كونهما قد حققا متوسط مربعات خطأ لمعيار اكياكي، بلغ٢(٠٨ ٠).

٤. يتبين من الجداول (١٥) و (١٦) و (١٧) بان مؤشر نصف عرض فترة الثقة، قد عكس بالضبط نفس ما عكسه المؤشرين السابقين، مؤشر تحيز معيار اكياكي، ومؤشر متوسط مربعات الخطأ لمعيار اكياكي، في الفقرتين السابقتين، عدا انه في حالة السلسلة الزمنية غير المستقرة وعند حجم العينة الكبير، قد كانت الافضلية من بين اساليب تقليص التباين في توليد السلسلة الزمنية التي تخضع للانموذج ماركوف، هي لاسلوب المتغيرات المتضادة دون ان تشارك اي اسلوب آخر تلك الافضلية، تلاه التحوير المقترح على اسلوب متغيرات السيطرة.

٥. يتبين من الجداول (١٨) و (١٩) و (٢٠) بان مؤشر تقدير عدد التشغيلات اللازمة لتقدير الانموذج قد عكس بالضبط نفس ما عكسه مؤشر متوسط مربعات الخطأ لمعيار اكياكي.

٦. يتبين من الجداول (٢١) و (٢٢) و (٢٣) بان مؤشر الزمن اللازم لمحاكاة النماذج الثلاثة قيد الدراسة، قد عكس افضلية واضحة لاسلوب المحاكاة المباشر كونها تحتاج اقل زمن لانجاز المحاكاة، عدا انه في نوع السلسلة الزمنية التي تعاني من مشكلة القيمة الحدية (الانموذج الثاني)، قد كانت تلك الافضلية لاسلوب المعاينة حسب الاهمية ولكن بفارق ضئيل جدا عن اسلوب المحاكاة المباشر.

٧. يتبين من الجدول (٢٥) بان مؤشر كفاءة تقدير الانموذج الذي يمثل السلسلة الزمنية التي تعاني

من مشكلة القيمة الحدية قد عكس افضلية أسلوب المتغيرات المتضادة في محاكاة الانموذج المذكور على باقي اساليب تقليص التباين وعلى وفق أحجام العينات كافة.

نفس الكلام الوارد اعلاه ينطبق على الانموذج الذي يسلك على وفق السلسلة الزمنية المستقرة، وذلك على وفق النتائج الواردة في الجدول (٢٤) عدا حجوم العينات الكبيرة، فقد حاز اسلوب المعاينة المجزئة على تلك الافضلية، تلاه أسلوب المتغيرات المتضادة.

اسلوب المعاينة المجزئة حاز ايضا على افضلية توليد الأنموذج الذي يمثل السلسلة الزمنية غير المستقرة في حالتي حجوم العينات الصغيرة والكبيرة، وذلك على وفق النتائج الواردة في الجدول (٢٦)، في حين حاز اسلوب المعاينة حسب الأهمية تلك الأفضلية في حالة حجوم العينات المتوسطة.

ونستنتج من خلال مقارنة مؤشر عدد التشغيلات و مؤشر الكفاءة بان مؤشر الزمن لايقيس الجهد المبذول فعليا في المحاكاة حيث لايعطي الأسلوب المباشر نفس الدقة التي يعطيها اي من الاساليب الاخرى في حالة زيادة عدد التشغيلات بالإضافة الى ان قياس الجهد المبذول في الحاسوب يجب ان يراعى فيه جميع موارد الحاسوب **Resources** من ذاكرة و قرص صلب وسرعة ناقل وهكذا وعليه فان استخدام الزمن في قياس الكفاءة يعتبر غير دقيقا لتحيزه في قياس الجهد المطلوب للمحاكاة ولاختلاف هذا الجهد لنفس المحاكاة بسبب البيئة متعددة المهام **multi task** داخل الحاسب.

جدول (٦) : نسبة الاختيار الصحيح للأنموذج الأول التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	0.9576	0.9686	0.9192	0.9726	0.9850
run=2000 n=30	0.9555	0.9945	0.9085	0.9630	0.9510
run=1000 n=100	0.9830	1.0000	0.9600	0.9890	0.9490

جدول (٧) : نسبة الاختيار الصحيح للأنموذج الثاني التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	0.9660	0.9566	0.9358	0.9752	0.9864
run=2000 n=30	0.9535	0.9900	0.9240	0.9660	0.9650
run=1000 n=100	0.9350	1.0000	0.8880	0.9460	0.9850

جدول (٨) : نسبة الاختيار الصحيح للأنموذج الثالث التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified

run=5000 n=10	0.9670	0.8906	0.9392	0.9762	0.8752
run=2000 n=30	0.9630	0.8330	0.9300	0.9735	0.9735
run=1000 n=100	0.9660	0.9270	0.9270	0.9690	0.8400

جدول (٩) : تحيز مقدرات المحاكاة للأنموذج الأول التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	0.0574	0.0384	0.0844	0.0340	0.0150
run=2000 n=30	0.0685	0.0065	0.0970	0.0490	0.0490
run=1000 n=100	0.0240	0.0000	0.0400	0.0130	0.0510

جدول (١٠) : تحيز مقدرات المحاكاة للأنموذج الثاني التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	0.0472	0.0528	0.0650	0.0326	0.0136
run=2000 n=30	0.0685	0.0120	0.0785	0.0450	0.0350
run=1000 n=100	0.1120	0.0000	0.1140	0.0810	0.0150

جدول (١١) : تحيز مقدرات المحاكاة للأنموذج الثالث التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	0.0446	0.1326	0.0616	0.0310	0.1278
run=2000 n=30	0.0530	0.2295	0.0715	0.0360	0.0270
run=1000 n=100	0.0630	0.1030	0.0760	0.0480	0.1630

جدول (١٢) : متوسط مربعات الخطأ لمعيار اكياكي للأنموذج الأول التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importanc e	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	0.0874	0.0524	0.0916	0.0472	0.0150

run=2000 n=30	0.1165	0.0085	0.1080	0.0730	0.0490
run=1000 n=100	0.0380	0.0000	0.0400	0.0170	0.0510

جدول (١٣) : متوسط مربعات الخطأ لمعيار اكياكي للأنموذج الأول التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	0.0736	0.0716	0.0666	0.0482	0.0136
run=2000 n=30	0.1125	0.0160	0.0835	0.0670	0.0350
run=1000 n=100	0.2060	0.0000	0.1180	0.1350	0.0150

جدول (١٤) : متوسط مربعات الخطأ لمعيار اكياكي للأنموذج الأول التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	0.0678	0.1790	0.0632	0.0454	0.1338
run=2000 n=30	0.0850	0.3545	0.0745	0.0550	0.0280
run=1000 n=100	0.1210	0.1630	0.0820	0.0820	0.1690

جدول (١٥) : نصف عرض فترة الثقة لتقدير الأنموذج الأول التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	0.008039	0.006255	0.008056	0.005948	0.003369
run=2000 n=30	0.014655	0.004031	0.013761	0.011645	0.009461
run=1000 n=100	0.011990	0.000000	0.012146	0.008041	0.013636

جدول (١٦) : نصف عرض فترة الثقة لتقدير الأنموذج الثاني التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	0.007405	0.007271	0.006923	0.006018	0.003210

run=2000 n=30	0.014390	0.005519	0.012188	0.011172	0.008055
run=1000 n=100	0.027261	0.000000	0.020084	0.022213	0.007534

جدول (١٧) : نصف عرض فترة الثقة لتقدير الأنموذج الثالث التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	0.007111	0.011136	0.006756	0.005843	0.009500
run=2000 n=30	0.012565	0.024078	0.011545	0.010157	0.007238
run=1000 n=100	0.021203	0.024196	0.017112	0.017497	0.023392

جدول (١٨) : تقدير عدد التشغيلات لتقدير الأنموذج الأول التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	8740	5240	9160	4720	1500
run=2000 n=30	4660	340	4320	2920	1960
run=1000 n=100	760	10	800	340	1020

جدول (١٩) : تقدير عدد التشغيلات لتقدير الأنموذج الثاني التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	7360	7160	6660	4820	1360
run=2000 n=30	4500	640	3340	2680	1400
run=1000 n=100	4120	20	2360	2700	300

جدول (٢٠) : تقدير عدد التشغيلات لتقدير الأنموذج الثالث التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	6780	17900	6320	4540	13380
run=2000 n=30	3400	14180	2980	2200	1120
run=1000 n=100	2420	3260	1640	1640	3380

جدول (٢١) : الزمن اللازم لمحاكاة الأنموذج الأول التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	2.750000	2.750000	4.610352	7.409668	8.080078
run=2000 n=30	2.089844	2.140137	3.899902	6.320313	6.259766

run=1000 n=100	2.810059	2.850098	5.770020	8.679688	7.189941

جدول (٢٢) : الزمن اللازم لمحاكاة الأنموذج الثاني التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	5.879883	5.710449	6.099609	7.250000	11.260250
run=2000 n=30	2.140137	2.090332	3.959961	6.089844	6.049805
run=1000 n=100	2.860352	2.859863	5.600098	8.620117	7.529785

جدول (٢٣) : الزمن اللازم لمحاكاة الأنموذج الثالث التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين				
	Direct	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	2.750000	4.229980	4.610107	7.469971	8.399902
run=2000 n=30	2.089844	3.570068	3.899902	6.090088	6.050049
run=1000 n=100	2.859863	4.989990	5.550049	8.679932	7.960205

جدول (٢٤) : كفاءة تقدير الأنموذج الأول التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين			
	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	0.890511	4.723545	2.045403	1.608509
run=2000 n=30	0.224795	7.828607	3.688170	7.159562
run=1000 n=100	0.000000	8.213380	2.779913	13.049088

جدول (٢٥) : كفاءة تقدير الأنموذج الثاني التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين			
	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	1.587513	3.161981	1.007755	1.252146
run=2000 n=30	0.318932	5.550992	2.671323	4.038330
run=1000 n=100	0.000000	11.964550	4.520485	2.193724

جدول (٢٦) : كفاءة تقدير الأنموذج الثالث التطبيق الثالث

التشغيلات و حجوم العينات	أساليب تقليص التباين			
	Importance	Antithetic	Control	Stratified
run=5000 n=10	6.195825	4.700194	2.107078	17.385015

run=2000 n=30	8.500798	6.087111	2.359062	3.584257
run=1000 n=100	15.005583	27.169370	8.498241	87.399437

VI – الأستنتاجات

سندرج في هذه الفقرة ابرز ماتم التوصل اليه فيما يخص أساليب تقليص التباين المدروسة من جوانب علاوة على ماتم ذكره تفصيلا" فيما يتعلق بموضوع التجريب في الفقرة السابقة :

١. أظهرت أساليب تقليص التباين تقاربا نسبيا في النتائج بشكل عام ، على اننا نشير الى التميز الواضح بالافضلية عليها للتعديل المقترح لأسلوب متغيرات السيطرة .

٢. لايمثل معيار قياس الجهد اللازم للمحاكاة المستخدم في هذا البحث -والمتمثل بقياس الوقت اللازم لاجرائها- معيارا رصينا وذلك بسبب عدم اخذه بنظر الاعتبار عدد مرات اجراء المحاكاة نسبة الى عدد التشغيلات الأولية للمحاكاة الاولية كما وانه لايأخذ بنظر الاعتبار مقدار الدقة الناتج عن المحاكاة ففي بعض الاساليب يمكن ان تصل الدقة الى قيمة عالية لايمكن لغيره من الاساليب وصولها الا بوقت طويل جدا ومن جهة اخرى يمكن للأسلوب نفسه الوصول الى دقة متوسطة بزمن محدد يمكن لغيره من الأساليب وصول نفس الدقة بزمن اقل، وبعبارة اخرى فان هذا المعيار لايأخذ بنظر الاعتبار شكل منحنى الخواص لأساليب تقليص التباين. ونستنتج من خلال مقارنة مؤشر عدد التشغيلات و مؤشر الكفاءة بان مؤشر الزمن لايقيس الجهد المبذول فعليا في المحاكاة حيث لايعطي الأسلوب المباشر نفس الدقة التي يعطيها اي من الأساليب الأخرى في حالة زيادة عدد التشغيلات بالإضافة الى ان قياس الجهد المبذول في الحاسوب يجب ان يراعى فيه جميع موارد الحاسوب Resources من ذاكرة و قرص صلب وسرعة ناقل وهكذا وعليه فان استخدام الزمن في قياس الكفاءة يعتبر غير دقيقا لتحيزه في قياس الجهد المطلوب للمحاكاة ولاختلاف هذا الجهد لنفس المحاكاة بسبب البيئة متعددة المهام multi task داخل الحاسب.

٣. تحيز طريقة تقدير عدد التشغيلات المتوقع حيث تعطي دائما عدد تشغيلات متوقع اقل من العدد الحقيقي اللازم للحصول على دقة معينة وينتج ذلك بسبب عدم اخذه بنظر الاعتبار تحيز المقدر وانما يأخذ بنظر الاعتبار نصف عرض فترة الثقة التي تكون دالة بدلالة تباين المقدر وحجم العينة فقط.

٤. لا يعمل بشكل عام أسلوب المعاينة المجزئة في العينات الصغيرة ويرجع السبب في ذلك الى تجزئة العينة الصغيرة الى عينات اصغر فأصغر مما يؤدي الى زيادة متوسط مربعات الخطأ بشكل ملحوظ وبالتالي فشل هذا الاسلوب إلا في حالات خاصة يدرس فيها الباحث بدقة كبيرة التجزئة الحاصلة بحيث تعطي نتائج جيدة وتتطلب هذه العملية جهدا كبيرا ولا يمكن ضمان نتائجها دائما، اما في العينات المتوسطة والكبيرة فيجب على الباحث تغيير عملية التجزئة عن تغير حجم العينة للحصول على نتائج جيدة وإلا يمكن ان تسوء نتائج هذه الطريقة كثيرا.

٥. تحتاج اساليب تقليص التباين ذات المحاكاة الاولية الى عدد كبير من التشغيلات في المحاكاة الاولية لضمان مستوى الدقة العالية حيث تتناقص الدقة بتناقص عدد التشغيلات في المحاكاة

الاولية ومن هذه الاساليب اسلوب المعاينة المجزئة واسلوب متغيرات السيطرة.

٦. أعطى اسلوب متغيرات السيطرة نتائج جيدة في عملية تقليص التباين والنقطة المهمة فيه هي امكانية تطبيقه بسهولة دون الدخول في التفاصيل النظرية لعملية المحاكاة.

٧. يمكن للتحوير المقترح على اسلوب متغيرات السيطرة ان يحسن اداء التقديرات والاختبارات الاحصائية بشكل عام عن طريق اجراء محاكاة اولية مشابهة للتطبيق المدروس مما يؤدي الى امكانية ايجاد تعديل معين على المقدر المطلوب حسابه ومن ثم ايجاد نتائج تتسم بمواصفات ادق من حيث التحيز والتباين والاتساق.

المصادر

١. النائب، بلسم مصطفى شفيق، ٢٠٠٣، "تقدير دالة المعولية لتوزيع لوغاريتم الطبيعي مع تطبيق عملي"، رسالة ماجستير في الإحصاء، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد.

2. Ben-Ameur, H., L'Ecuyer, P. and Lemieux, 1999, C., "Variance reduction of Monte Carlo and randomized quasi-Monte Carlo estimation for stochastic volatility models in finance", Proceedings of Winter Simulation Conference.

3. Ben-Ameur, H., L'Ecuyer, P. and Lemieux, 2002, C., "Combination of general antithetic transformations and control variables", Http://www.

4. Douma, S.G., Hoog, T.J., Van den Hof, P.M.J., 1998, "Wavelets and variance reduction in non-parametric transfer function estimation", Http://www.

5. Fisherman, G. S., 1973, "Concept and methods in discrete event digital simulation" John Wiley & Sons, Canada.

6. Goldsman, D., Nelson, B., 2001, "Statistical selection of the best system", Proceedings of Winter Simulation Conference

7. Hammersley, J. M. and Handscomb, D. C., 1967, "Monte Carlo methods", Methuen Co. Ltd, London.

8. Heegaard, P.E., 1995, "Comparison of speed up techniques for simulation", Http://www.

9. Hesterberg, T.C. and Nelson, B.L., 1997, "Control variate for probability and quantial estimation", Http://www.

10. Hui Ng, S., 2001, "Reducing input parameter uncertainty for simulations", Proceedings of Winter Simulation Conference.

11. Ingalls, R.G., 2001, "Introduction to simulation", Proceedings of Winter Simulation Conference.

12. Kammal, H.A. and Ayyub, B.M., 2000, "Variance reduction for simulation-based structural reliability assessment of system", 8th ASCE Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability.

13. Keramat, M. and Kielbasa, R.,1998, "A study of stratified sampling in variance reduction techniques for parametric yield estimation", IEEE trans. Circuits and systems-II,Vol. 45, No. 5.

14. Kohatsu-Higa, A. and Petterson, R., "Variance reduction methodes for simulation of densities on wiener space", Http://www.

15. Law, A.M. and Kelton, W.D., 2000, "Simulation modeling and analysis", 3rd edition, McGraw-Hill, Singapore.

16. Leemis, L., 2001, "Input modeling techniques for discrete-event simulation", Winter Simulation Conference.

17. Lemieux, C. and L'Ecuyer, P., 2000, "Using lattice rules for variance reduction in simulation", Winter Simulation Conference.

18. Naylor, T. H., 1971, "Computer simulation experiments with models of economic systems", John Wiley & sons, New York.

19. Owen, A. and Zhou, Y., 1998, "Adaptive importance sampling by mixtures of products of beta distribution", Http://www.

20. Owen, A. and Zhou, Y., 1999, "Safe and effective importance sampling", Http://www.

21. Pichitlamken, J., Nelson, B., 2001, "Selection of the best procedure for optimization via simulation", Proceedings of Winter Simulation Conference.

22. Roinson, S., 1999, "Three sources of simulation inaccuracy (and how to overcome them)", Winter Simulation Conference.

23. Rubinstein, R.Y. and Melawed, B., 1998, "Modern simulation and modeling", John Wily , New York.

24. Yeh, W., 1997, "A new Monte Carlo method for network reliability", Http://www.